Corso di laurea in Matematica
Algebra 2, a.a. 2021–22
Scritto 21 giugno 2022

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Provare che il seguente polinomio
$$f(x) = \frac{1}{2}x^5 + ax^3 + \frac{a(a+1)}{2}x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$$
è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ per ogni $a \in \mathbb{N}$.

2. Usando *solamente* i teoremi di Berlekamp, trovare la fattorizzazione in irriducibili del polinomio
$$f(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x].$$

3. Sia G un gruppo finito con p elementi, dove p è un numero primo. Provare che G è un gruppo abeliano. Quanti sottogruppi normali ha G?

4. Ricordare che, se $\alpha \in \mathbb{C}$, con $\mathbb{Q}[\alpha]$ si indica il più piccolo anello che contiene $\mathbb{Q}$ ed α. Sia ora $\alpha = \sqrt{3} + 1$. Provare che $\mathbb{Q}[\alpha]$ è un campo. In che modo si possono scrivere gli elementi di $\mathbb{Q}[\alpha]$?