Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2020–21
Scritto 21 gennaio 2021

Partecipando a questa sessione di esame, accetto di rispettare le seguenti norme di comportamento:

- Le risposte all'esame saranno svolte solo da me.
- Non renderò disponibili a nessun altro le mie risposte.
- Mi impegno a non consultare persone o materiali di qualsiasi tipo (libri, appunti, siti, ...).

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia G un gruppo di ordine 51. Dire quanti sottogruppi normali ha G. Sia H un sottogruppo normale e proprio di G. Provare che G/H è abeliano.
2. Sia p un numero primo e sia $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ la proiezione canonica. Si estenda π all'omomorfismo $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[x]$ (tale che $\phi(x) = x$). Provare che se $f \in \mathbb{Z}[x]$ è tale che $\phi(f)$ ha lo stesso grado di f e se $\phi(f)$ è irriducibile, allora f è irriducibile.
3. Sia $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$. Dopo aver spiegato, nel modo più veloce possibile, che K è un campo, dire se è perfetto e trovare (se esiste) $\sqrt[3]{x+2}$.
4. Dire quanti fattori irriucibili ha il polinomio $x^5 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ e dire se ha fattori multipli (utilizzare Berlekamp).