

Corso di laurea in Matematica
Algebra2
a.a. 2019–20
Scritto 21 gennaio 2020

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia G un gruppo di ordine 143. Quanti sono i sottogruppi normali di G ?
2. Si consideri in $\mathbb{Z}[x]$ l'insieme $I = \{3a + xb \mid a, b \in \mathbb{Z}[x]\}$. Si provi che:
 - (a) I è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$;
 - (b) $x, 3 \in I, 1 \notin I$;
 - (c)* I non è un ideale principale ed è massimale.
3. Dopo aver spiegato perchè il polinomio $f = x^2 + 5x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$ è irriducibile, trovare l'inverso di $[x + 2] \in \mathbb{Q}[x]/(f)$.
4. Si fissi un numero naturale n . Provare che esiste un numero $a \in \mathbb{R}$ il cui polinomio minimo su \mathbb{Q} è di grado n . Si può dire la stessa cosa per l'estensione $\mathbb{C} : \mathbb{R}$?
5. Usando opportunamente il metodo di Berlekamp, dire quanti fattori irriducibili ha il polinomio $x^{18} + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.