

Corso di laurea in Matematica
Algebra2
a.a. 2018–19
Scritto 16 luglio 2019

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia G_1 un gruppo con 23 elementi e G_2 un gruppo con 31 elementi. Sia G il gruppo prodotto $G_1 \times G_2$ (quindi gli elementi di $G_1 \times G_2$ sono coppie (g_1, g_2) e il prodotto è dato da $(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1 \cdot g'_1, g_2 \cdot g'_2)$). Provare che $H = G_1 \times \{1\}$ è sottogruppo normale di G . Usare poi i teoremi di Sylow, per provare che H è l'unico sottogruppo normale di G di ordine 23.
2. Usando l'algoritmo di Berlekamp, scomporre in fattori irriducibili il polinomio $x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.
3. Sia K un campo. Trovare tutti gli ideali massimali che contengono l'ideale $I = (x^2 - 1, y^2) \subseteq K[x, y]$.
4. Sia $a \in \mathbb{R}$ algebrico su \mathbb{Q} di grado 2. Quanto può valere $\mathbb{Q}[a, \sqrt{2}] : \mathbb{Q}$?
5. Provare che $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ è un campo e trovare tutti i suoi elementi primitivi.