

Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2023–24
Scritto 16 gennaio 2024

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia G un gruppo di 77 elementi. Dire quanti sottogruppi normali ha G .
2. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ l'omomorfismo di anelli dato da $\phi(q) = q$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$ e $\phi(x) = 3x - 2$ e poi esteso nell'unico modo possibile. Provare che ϕ è un isomorfismo di anelli e dire chi è il suo inverso.
3. Dire se il polinomio $x^4 + 2x^3 + x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ ha fattori multipli e dire quanti sono i suoi fattori irriducibili (usando il metodo di Berlekamp).
4. Sia L un campo, estensione del campo K . Sia $a \in L$ e si supponga che esista un polinomio $f(x) \in K[x]$ monico e irriducibile tale che $f(a) = 0$. Provare che allora f è il polinomio minimo di a su K .
5. Sia $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$. Spiegare perché K è un campo perfetto. Trovare un elemento $a \in K$ tale che $a^3 = [x + 2]$.