

Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2020–21
Scritto 13 luglio 2021

Partecipando a questa sessione di esame, accetto di rispettare le seguenti norme di comportamento:

- Le risposte all'esame saranno svolte solo da me.
- Non renderò disponibili a nessun altro le mie risposte.
- Mi impegno a non consultare persone o materiali di qualsiasi tipo (libri, appunti, siti, ...).

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Provare che il polinomio $f_a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dato da:

$$f_a(x) = x^7 + a(a+1)x^5 + 6ax^3 + 2$$

è irriducibile per ogni $a \in \mathbb{N}$.

2. Siano K ed L due campi, con L estensione di K e si supponga inoltre che $[L : K] = 4$. Spiegare perché L è un'estensione algebrica di K . Sia poi $a \in L$. Può accadere che il polinomio minimo di a su K sia di grado 3?
3. Sia $X = \{1, 2, 3\}$ e sia

$$G = \{f : X \longrightarrow X \mid f \text{ biettiva e } f(1) = 1\}.$$

Provare che G è un sottogruppo del gruppo S_3 delle permutazioni di X .
Provare che G è commutativo. Sia poi $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ e

$$G_1 = \{f : Y \longrightarrow Y \mid f \text{ biettiva e } f(1) = 1\}.$$

G_1 è un sottogruppo commutativo di S_4 ?

4. Sia K un campo con 4 elementi. Che caratteristica ha K ? Provare poi che esiste in K un elemento a tale che $a^2 = a + 1$.