

Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2022–23
Scritto 13 giugno 2023

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia G un gruppo con 66 elementi. Provare che G ha un sottogruppo normale di ordine 11 e che tale sottogruppo è unico.
2. Dire chi sono le unità e i divisori dello zero dell'anello prodotto $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$.
3. Sia $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ e si supponga che sia libero da quadrati (cioè scomponendo a in fattori primi distinti, nessun fattore ha esponente maggiore di 1). Provare che il polinomio $x^n + a^2x + a \in \mathbb{Q}[x]$ è irriducibile ($n > 2$).
4. Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{Q}[x]$ un ideale primo che contiene l'ideale $(x^2 - 4)$. Dire chi è l'ideale \mathcal{P} .