Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2018–19
Scritto 12 febbraio 2019

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia G un gruppo tale che $g^2 = 1$ per ogni $g \in G$. Provare che il gruppo G è abeliano.

2. Dire chi sono le unità e i divisori dello zero dell'anello prodotto $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$.

3. Sia $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ e si supponga che sia libero da quadrati (cioè scomponendo a in fattori primi distinti, nessun fattore ha esponente maggiore di 1). Provare che il polinomio $x^n + a^2x + a \in \mathbb{Q}[x]$ è irriducibile ($n > 2$).

4. Sia $I = (x^4, y^3 - y^2) \subseteq K[x, y]$ (dove K è un campo). Trovare tutti gli ideali primi che contengono I. Provare poi che tali ideali sono anche massimali.

5. Dire quanti fattori irriducibili ha il polinomio

$$x^{72} + 2x^{36} + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$