

**Corso di laurea in Matematica**  
**Algebra2**  
**a.a. 2019–20**  
**Scritto 21 gennaio 2020**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia  $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  il gruppo prodotto (la somma in  $G$  è definita componente per componente). Sia  $H = \{(3x, 5x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ . Provare che  $H$  è un sottogruppo normale e dire chi è il gruppo  $G/H$ .
2. Sia  $A$  un anello (commutativo, unitario) e sia  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  un sottoinsieme finito di  $A$ . Descrivere gli elementi dell'ideale generato da  $S$ .
3. Trovare l'ordine di 2 nell'anello  $\mathbb{Z}_{1023}$ . Usare opportunamente tale informazione per provare che 1023 non è un numero primo.
4. Si ricordi che un polinomio  $f \in \mathbb{Q}[x]$  si dice primitivo se i suoi coefficienti sono interi e se il m.c.d. dei coefficienti vale 1. Provare che se  $a, b \in \mathbb{Q}[x]$  sono primitivi, allora il prodotto  $ab$  è primitivo.
5. L'ideale  $(x - 3y, x + 2y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$  è primo? È massimale?
6. Provare che  $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$  è algebrico su  $\mathbb{Q}$ . Trovare il suo polinomio minimo (su  $\mathbb{Q}$ ).