

**Corso di laurea Matematica**  
**Algebra 2**  
**a.a. 2022–23**  
**Scritto 3 febbraio 2023**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia  $G$  un gruppo tale che  $g^2 = 1$  per ogni  $g \in G$ . Provare che il gruppo  $G$  è abeliano.
2. Dire chi sono le unità e i divisori dello zero dell'anello prodotto  $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ .
3. Dire se il polinomio  $2x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 15 \in \mathbb{Z}[x]$  è irriducibile in  $\mathbb{Z}[x]$  e in  $\mathbb{Q}[x]$ . Rispondere alla stessa domanda nel caso in cui il polinomio sia  $2x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 6 \in \mathbb{Z}[x]$ .
4. Provare che  $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$  è un campo. Dire quanti elementi ha e trovare tutti i suoi elementi primitivi.
5. Dire quanti fattori irriducibili ha il polinomio

$$x^{72} + 2x^{36} + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$