Il gruppo S_4

Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$ un insieme con 4 elementi. Con S_4 indichiamo il gruppo di tutte le permutazioni dei 4 elementi di X; in altre parole un elemento di S_4 è una permutazione degli elementi $1, 2, 3, 4$ di X, quindi può essere visto come un'applicazione biiettiva di X in se stesso. Un elemento di S_4 individuato da una permutazione a_1, a_2, a_3, a_4 si usa quindi indicare con la notazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

Un altro modo utile per indicare un elemento di S_4 (e, in generale, di S_n), è con i cicli o prodotti di cicli disgiunti (si dimostra facilmente infatti che ogni permutazione è sempre ottenibile come prodotto di cicli disgiunti). Ad esempio i tre elementi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

si indicano rispettivamente con: $(1, 2, 3)$, con $(1, 3)(2, 4)$ e con $(1, 2, 3, 4)$ (il primo elemento si potrebbe anche indicare con $(2, 3, 1)$ o anche con il prodotto di cicli disgiunti $(1, 2, 3)(4)$, ma quest'ultima notazione non è usata, in quanto sovrabbondante). Usando la notazione degli elementi di S_4 con i cicli, questi sono i suoi 24 elementi (il ciclo $()$ indica la permutazione identica):

$()$	$(1,2)$	$(1,2,3,4)$	$(1,3)(2,4)$	$(1,3,4)$	$(2,3,4)$
$(1,4,3,2)$	$(1,3,2,4)$	$(1,3,4,2)$	$(1,2,4,3)$	$(1,4,2,3)$	$(2,4,3)$
$(1,4,3)$	$(1,4)(2,3)$	$(1,4,2)$	$(1,3,2)$	$(1,3)$	$(3,4)$
$(2,4)$	$(1,4)$	$(2,3)$	$(1,2)(3,4)$	$(1,2,3)$	$(1,2,4)$

Nella tabella 1 sono elencati tutti i suoi sottogruppi (dati per mezzo dei generatori) e i rispettivi ordini. La tabella può essere utilizzata per verificare i teoremi di Sylow:
I 2-Sylow sottogruppi di S_4 sono i sottogruppi di ordine 8. Il loro numero N_2 deve dividere 3 e $N_2 - 1$ deve essere divisibile per 2. Quindi N_2 può essere solo 1 o 3. Come si vede dalla tabella, i sottogruppi di S_4 di ordine 2^3 sono infatti 3. Analogamente, i 3-Sylow sottogruppi sono 4. Ogni sottogruppo di ordine 2 o 4 è contenuto in un 2-Sylow sottogruppo di S_4.

generatori	ordine
()	1
(1,2)(3,4)	2
(1,3)(2,4)	2
(1,4)(2,3)	2
(3,4)	2
(2,3)	2
(2,4)	2
(1,2)	2
(1,3)	2
(1,4)	2
(2,3,4)	3
(1,2,3)	3
(1,2,4)	3
(1,3,4)	3
(1,2)(3,4), (1,4)(2,3)	4
(3,4), (1,2)(3,4)	4
(1,4), (1,4)(2,3)	4
(2,4), (1,3)(2,4)	4
(1,2)(3,4), (1,4,2,3)	4
(1,2,3,4), (1,3)(2,4)	4
(1,3,4,2), (1,4)(2,3)	4
(3,4), (2,3,4)	6
(3,4), (1,3,4)	6
(1,2), (1,2,3)	6
(1,2,4), (1,4)	6
(3,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3)	8
(1,2)(3,4), (1,4), (1,4)(2,3)	8
(2,4), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4)	8
(2,3,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3)	12
(3,4), (2,3,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3)	24

Tabella 1: Elenco dei sottogruppi di S_4 con i rispettivi ordini.