Algebra 2

Esercizi 5 - 8 novembre 2019

1. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}$ l'omomorfismo di valutazione che valuta x in 7, cioè ϕ è dato da $\phi(a) = a$ per $a \in \mathbb{Q}$ e $\phi(x) = 7$ (ed esteso nell'unico modo possibile). Calcolare $\ker(\phi)$.

2. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$ l'omomorfismo di valutazione che valuta x in x^2, cioè ϕ è dato da $\phi(a) = a$ per $a \in \mathbb{Q}$ e $\phi(x) = x^2$. Calcolare anche in questo caso $\ker(\phi)$.

3. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'omomorfismo di valutazione che valuta x in $\sqrt{2}$. Calcolare $\ker(\phi)$.

4. Il teorema di unicità di quoziente e resto nella divisione di un polinomio g per un polinomio f in $A[x]$ richiede che il coefficiente direttivo di f sia invertibile. Si considerino ora i seguenti polinomi in $\mathbb{Z}_8[x]$: $f = 2x + 1$, $g = 4x + 1$. Scrivere $g = qf + r$ in due modi diversi (con $\deg(r) < \deg(f)$) (ovviamente in questo caso il coefficiente direttivo di f non è invertibile).

5. Provare che il polinomio $23x^3 + 31x^2 + 41 \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile.

6. Sia $f_a = x^5 + (a^4 - 1)x^4 - 5ax + 3a^2 + 2a$, con $a \in \mathbb{Z}$. Provare che f_a è irriducibile per infiniti valori di a.[1]

[1] Suggerimento: Il numero 5 è un bel numero primo