

ALGEBRA 2  
Esercizi 5 - 7 novembre 2018

1. Sia  $\phi : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}$  l'omomorfismo di valutazione che valuta  $x$  in 7, cioè  $\phi$  è dato da  $\phi(a) = a$  per  $a \in \mathbb{Q}$  e  $\phi(x) = 7$  (ed esteso nell'unico modo possibile). Calcolare  $\ker(\phi)$ .
2. Sia  $\phi : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$  l'omomorfismo di valutazione che valuta  $x$  in  $x^2$ , cioè  $\phi$  è dato da  $\phi(a) = a$  per  $a \in \mathbb{Q}$  e  $\phi(x) = x^2$ . Calcolare anche in questo caso  $\ker(\phi)$ .
3. Sia  $\phi : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{R}$  l'omomorfismo di valutazione che valuta  $x$  in  $\sqrt{2}$ . Calcolare  $\ker(\phi)$ .
4. Provare che l'ideale  $(3, x^2) \subseteq \mathbb{Z}[x]$  non è un ideale principale in  $\mathbb{Z}[x]$ .
5. Il teorema di unicità di quoziente e resto nella divisione di un polinomio  $g$  per un polinomio  $f$  in  $A[x]$  richiede che il coefficiente direttivo di  $f$  sia invertibile. Si considerino ora i seguenti  $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_8[x]$ :  $f = 2x + 1$ ,  $g = 4x + 1$ . Scrivere  $g = qf + r$  in due modi diversi (con  $\deg(r) < \deg(f)$ ) (ovviamente in questo caso il coefficiente direttivo di  $f$  non è invertibile).