

ALGEBRA 2
Esercizi 4 - 31 ottobre 2018

1. Sia S_4 il gruppo delle permutazioni di 4 elementi. Trovare tutti gli elementi di S_4 di ordine 3 (un elemento di ordine 3 è, ad esempio, $\begin{pmatrix} 1,2,3,4 \\ 1,3,4,2 \end{pmatrix}$). Trovare quindi i 3-Sylow sottogruppi di S_4 e verificare che il loro numero N è un divisore dell'ordine di S_4 ed è congruo ad 1 modulo 3.

2. Il gruppo diedrale D_5 è il gruppo delle simmetrie del pentagono regolare. È generato da due elementi: la rotazione σ di 72° in senso orario e la riflessione τ rispetto ad una retta passante per il vertice 1 e il centro del pentagono (v. figura 1). Pertanto $\sigma = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5 \\ 2,3,4,5,1 \end{pmatrix}$ e $\tau = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5 \\ 1,5,4,3,2 \end{pmatrix}$. Quindi, ad esempio, la simmetria data da $\sigma^2\tau$ si può calcolare sia usando la definizione di σ e τ — si tratta di applicare prima due volte σ e poi τ , quindi σ^2 manda 1 in 3, 2 in 4, 3 in 5, 4 in 1 e 5 in 2 e applicare a questo risultato τ , ottenendo: $\sigma^2\tau = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5 \\ 4,3,2,1,5 \end{pmatrix}$ — oppure si può calcolare $\sigma^2\tau$ ruotando prima due volte il pentagono in senso orario e poi riflettendolo lungo una retta verticale e leggendo il risultato (v. figura 2). Usando quindi le simmetrie del pentagono, calcolare i 5-Sylow sottogruppi di D_5 e verificare che il terzo teorema di Sylow è soddisfatto.

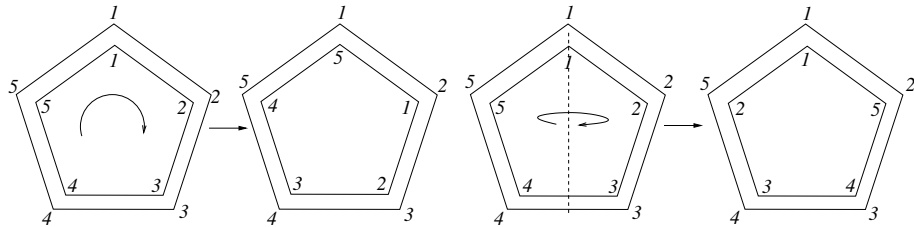


Figura 1

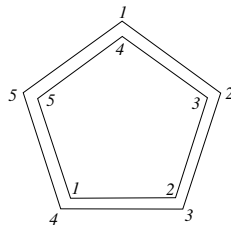


Figura 2