Algebra 2

Esercizi 1 - 28 settembre 2023

1. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Si definisca su G la seguente relazione:
$$g\,\mathcal{R}\,h \text{ se e solo se } gh^{-1} \in H$$
Provare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza (quindi provare che è riflessiva, simmetrica e transitiva).

2. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Se $g \in G$, ricordare che con Hg si indica l'insieme $\{hg \mid h \in H\}$. Provare che $Hg_1 = Hg_2$ se e solo se $g_1 g_2^{-1} \in H$.

3. Sia G un gruppo, H un sottogruppo normale di G e sia U un sottogruppo di G/H. Provare che $\pi^{-1}(U)$ è un sottogruppo di G che contiene H (dove $\pi : G \longrightarrow G/H$ è l'epimorfismo canonico).

4. Sia $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un omomorfismo di gruppi. Provare che f è un monomorfismo se e solo se $\ker(f) = \{1_{G_1}\}$.

5. Sia G un gruppo e siano H e K due sottogruppi normali di G con $H \subseteq K$. Provare che l'applicazione:
$$\phi : G/H \longrightarrow G/K \quad \text{definita da: } \phi([g]_H) = [g]_K$$
è ben definita ed è un omomorfismo di gruppi. Provare che è suriettiva. Trovare il suo nucleo. Dedurre la legge del doppio quoziente:
$$(G/H)\,/\,(K/H) \simeq G/K.$$

6. Sia A un anello commutativo e unitario e $I \subseteq A$ un ideale. Provare che la definizione di prodotto in A/I data da: $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$ è una buona definizione (cioè provare che, se $[a] = [a']$ e $[b] = [b']$, allora $[a \cdot b] = [a' \cdot b']$).