ALGEBRA 2

Esercizi 5 - 27 ottobre 2023

1. Siano $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$ due polinomi di $\mathbb{Q}[x]$. Si calcoli, usando la divisione e quindi l'algoritmo di Euclide (come nel caso di numeri interi) il massimo comun divisore $d(x)$ di f e g. Si trovino poi $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $d = \alpha \cdot f + \beta \cdot g$. (Una volta nella vita questo tipo di esercizio va fatto).

2. Trovare tutti i polinomi irriducibili di grado 2 e di grado 3 in $\mathbb{Z}_2[x]$.

3. Si consideri il polinomio $f = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. Provare che f è irriducibile. Sia poi $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ la proiezione canonica. Da π si costruisca l'omomorfismo di anelli $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_2[x]$ ottenuto estendendo π (spiegare come) e si consideri poi il polinomio $g = x^3 - 7x^2 + 4x - 11 \in \mathbb{Z}[x]$. Provare che g è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ (suggerimento: usare $\phi(g)\ldots$).

4. Generalizzando l'esercizio precedente, sia p un numero primo e si consideri l'omomorfismo di anelli $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[x]$ che estende la proiezione canonica $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$. Provare che se $g \in \mathbb{Z}[x]$ è un polinomio di grado n tale che $\phi(g)$ è ancora un polinomio di grado n e se $\phi(g)$ è irriducibile, allora g è irriducibile.

5. A completamento dell'esercizio precedente, trovare un esempio che mostri che l'ipotesi che il grado di $\phi(g)$ deve essere lo stesso del grado di g è essenziale. In altre parole, trovare un esempio che mostri che ci sono polinomi $g \in \mathbb{Z}[x]$ riducibili tali che $\phi(g) \in \mathbb{Z}_p[x]$ è irriducibile (ϕ definita come nell'esercizio precedente).

6. Sia $f = 36x^2 + 6x - 12 \in \mathbb{Z}[x]$. Scrivere f come prodotto di polinomi irriducibili.