ALGEBRA 2

Esercizi 7 - 27 novembre 2020

1. Sia $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 2)$. Dopo aver provato che K è un campo, dire quanti elementi ha e provare che $K^* = K \setminus \{0\}$ è, rispetto al prodotto, un gruppo ciclico.

2. Sia $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$. Provare che K è un campo perfetto. Trovare la radice cubica di $x + 2$.

3. Trovare, usando Berlekamp e anche il fatto che $(a + b)^p = a^p + b^p$ in un anello di caratteristica p, la fattorizzazione del polinomio $x^{80} + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

4. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x, y] \longrightarrow \mathbb{Q}[u, v]$ l'omomorfismo di anelli definito come l'identità sulle costanti e tale che $\phi(x) = u+v$ e $\phi(y) = u-v$ (x, y, u, v sono variabili di polinomi). Provare che ϕ è un isomorfismo e indicare l'inverso di ϕ.

5. Trovare i fattori irriducibili di $x^{p^2} - x^p \in \mathbb{Z}_p[x]$ (non usare Berlekamp).

6. Dire quanti fattori irriucibili ha il polinomio $x^5 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ e dire se ha fattori multipli.