Algebra 2

Esercizi 6 - 22 novembre 2022

1. Si ricordi che in un anello A, un ideale proprio I si dice *primo* se vale la seguente condizione: se $ab \in I$, allora $a \in I$ o $b \in I$. Provare che un numero $p \in \mathbb{Z}$ è primo se e solo se l'ideale (p) è un ideale primo.

2. Si ricordi che in un anello A, un ideale I si dice *massimale* se $I \neq (1)$ e se J è un ideale che contiene propriamente I, allora $J = (1)$. Provare che un ideale $\mathcal{M}$ massimale (in un anello A) è necessariamente primo. Provare che in $\mathbb{Z}$ e in $K[x]$ (con K campo) un ideale è primo se e solo se è massimale.

3. Sia p un numero primo e sia $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ la proiezione canonica e sia $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[x]$ l'estensione di π tale che $\phi(x) = x$. È vero che se $f \in \mathbb{Z}[x]$ è tale che $\phi(f)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$, allora f è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$?

4. Provare che se $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ sono primitivi ed associati, allora $f = g$ o $f = -g$.

5. Trovare tutti i divisori dello zero dell'anello $A = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 5x + 6)$.

6. Dire quanti elementi ha l'anello $\mathbb{Z}_3[x]/I$ dove $I = (x^4 + 1)$.