ALGEBRA 2

Esercizi 6 - 21 novembre 2020

1. Usando Berlekamp, fattorizzare il seguente polinomio:

$$f(x) = x^4 - 1 \in \mathbb{Z}_3[x].$$

2. Trovare tutti gli ideali primi $\mathcal{P}$ di $\mathbb{Q}[x]$ che contengono l'ideale $(x^2 - 1) \subseteq \mathbb{Q}[x]$.

3. Trovare tutti gli ideali primi dell'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1)$.

4. Sia I un ideale di un anello A e sia $I[x]$ il più piccolo ideale di $A[x]$ che contiene I ed x. Provare che

$$I[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_n \in I\}.$$

   Provare poi che l'anello quoziente $A[x]/I[x]$ è isomorfo all'anello di polinomi $(A/I)[x]$.

5. Siano A e B due anelli e sia $C = A \times B$ l'anello prodotto. Provare che l'anello $C[x]$ è isomorfo all'anello prodotto $A[x] \times B[x]$.

6. (Facoltativo) Dimostrare che il polinomio x^3+x^2+x+1 è sempre riducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$, per ogni primo p.[1]

[1]Suggerimento: Osservare che $x^4 - 1$ ha almeno gli zeri 1 e -1 in $\mathbb{Z}_p[x]/$.