Algebra 2

Esercizi 9 - 20 dicembre 2021

1. Provare che l'ideale $(x+3, y-4) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ è un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x, y]$.

2. Provare che l'anello quoziente $\mathbb{Q}[x, y]/(x^2, y)$ è isomorfo all'anello quoziente $Q[x]/(x^2)$. Provare che l'ideale $(x^2) \subseteq \mathbb{Q}[x]$ non è primo. Dedurre che nemmeno l'ideale $(x^2, y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ è primo.

3. Sia L un'estensione di K (K e L campi) e sia $a \in L$. Sia $f(x) \in K[x]$ un polinomio irriducibile in $K[x]$ tale che $f(a) = 0$, allora provare che $\frac{1}{\mathrm{lc}(f)} f(x)$ è il polinomio minimo di a su K ($\mathrm{lc}(f)$ indica il coefficiente direttivo di f).

4. Trovare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ del numero reale $\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

5. Provare che se $L : K$ e $a \in L$ è algebrico su K, allora anche $a + 1$ è algebrico su K.

6. Si fissi un numero natrurale $n \geq 1$. Provare che esiste un numero complesso a tale che il polinomio minimo di a su $\mathbb{Q}$ è di grado n.