Algebra 2

Esercizi 11 - 20 dicembre 2018

1. Sia G un gruppo finito di ordine n e H un sottogruppo di G di indice 2 (cioè H è di ordine $n/2$). Provare che H è normale in G.

2. Sia G un gruppo tale che $g^2 = 1$ per ogni $g \in G$. Provare che G è abeliano.

3. Sia $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ un monomorfismo di gruppi. Provare che se G_2 è abeliano, anche G_1 lo è. Dare un esempio per provare che l'ipotesi che ϕ sia monomorfismo è essenziale.

4. Sia $A = \mathbb{Z}_4[x]/(x^2)$. Quanti elementi ha l'anello A? Indicare tutti gli elementi di A che sono invertibili.

5. Sia K un campo, $a \in K$ un elemento non nullo fissato e si consideri l'omomorfismo $\phi : K[x] \longrightarrow K[x]$ tale che $\phi(x) = ax$ (e $\phi(u) = u$ per ogni $u \in K$). Provare che ϕ è un isomorfismo di anelli.

6. Sia $C_2 = \{1, a\}$ un gruppo ciclico di ordine 2 (quindi $a^2 = 1$) e sia $G = S_3 \times C_2$. Trovare tutti i sottogruppi di Sylow di G e verificare che il loro numero è coerente con quanto affermato dai teoremi di Sylow.

7. Sia K un campo. Trovare tutti gli ideali dell'anello $K \times K$.

8. Sia $a \in \mathbb{N}$ un numero con fattorizzazione in numeri primi data da: $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Provare che se almeno un esponente α_i vale 1, allora il polinomio
$$x^n + ax^2 + a \in \mathbb{Z}[x]$$
è irriducibile (per ogni $n \geq 3$).

9. Sia A un anello che soddisfa la condizione:
$$\text{per ogni } a \in A \text{ esiste } n \in \mathbb{N},\ n > 1, \text{ tale che } a^n = a$$
Provare allora che in A ogni ideale primo è anche massimale. Dare alcuni esempi di anelli che soddisfano tale proprietà.

10. Sia $f(x) = x^3 + 3ax + 2b \in \mathbb{C}[x]$. Per quali valori di a e b il polinomio non ha radici distinte?

11. Dare l'esempio di un anello, di caratteristica 6 che ha infiniti elementi. Provare poi che non esistono anelli di caratteristica 6 con 7 elementi.

12. Si può trovare un polinomio $f \in \mathbb{Z}_6[x]$ tale che $\mathbb{Z}_6[x]/(f)$ è un campo?

13. Dire quanti fattori irriducibili ha il polinomio $x^{108} + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

14. Usando l'algoritmo di Berlekamp, trovare la fattorizzazione, in fattori irriducibili, di $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

15. Si consideri l'ideale $I = (x + 3, y^2 + 4) \subseteq \mathbb{Z}_5[x, y]$. Trovare tutti gli ideali massimali che contengono I.

16. Sia $I = (x^3, y^3 - y) \subseteq K[x, y]$ (dove K è un campo). Trovare tutti gli ideali primi che contengono I. Provare poi che questi ideali primi sono anche massimali.

17. Sia $a \in \mathbb{C}$ e supponiamo che $a \in \mathbb{Q}[a^3]$. Provare che a è algebrico su $\mathbb{Q}$.

18. Siano K ed L campi, con L estensione di K. Sia poi $a \in L$ algebrico su K, di grado n (cioè il suo polinomio minimo su K è di grado n). Provare che $10a$ è algebrico su K. Che grado ha $10a$ su K?

19. Sia $f = x^3 + 2x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$. Trovare un campo di riducibilità completa di f.

20. Sia $(K = \{0, 1, 2, 3\}, +, \cdot\,)$ un insieme con due operazioni definite dalle seguenti tabelle:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

K risulta un campo. Pertanto deve essere della forma $\mathbb{Z}_p[x]/(q)$ dove p è un numero primo e q è un polinomio irriducibile. Trovare p e q e l'isomorfismo tra K e $\mathbb{Z}_p[x]/(q)$.

21.* Provare che $a = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$. Trovare il suo polinomio minimo.

22.* Provare che $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$. Trovare il suo polinomio minimo.

23. Sia $a \in \mathbb{C}$ algebrico su $\mathbb{Q}$. Provare che $a^2 + 1$ è algebrico su $\mathbb{Q}$.

24. Provare che $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ è un campo e trovare tutti i suoi elementi primitivi.

25. Sia L un campo finito con 49 elementi e si supponga che L sia un'estensione di un campo K. Cosa si può dire di K?