ALGEBRA 2

Esercizi 1 - 16 ottobre 2020

1. Sia A un anello (commutativo unitario) e I un ideale di A. Verificare che la legge data da: $[a]\cdot[b] = [a\cdot b]$ definisce un prodotto su A/I in modo che A/I diventa un anello (in particolare, verificare che è una buona definizione).

2. Siano I, J due ideali di un anello A, con $I \subseteq J$. Provare che la legge definita da $\phi([a]_I) = [a]_J$ è un'applicazione ben definita dall'anello A/I all'anello A/J e provare che è un epimorfismo di anelli. Calcolare il suo nucleo.

3. Sia $\pi : A \longrightarrow A/I$ la proiezione canonica (A è un anello, I è un ideale). Sia J un ideale di A che contiene I. Provare che vale:
$$J = \pi^{-1}(J/I)$$

4. Siano A e B due anelli. Si consideri l'anello prodotto $A \times B$ e sia $U = \{(a, 0) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$. Provare che U è un ideale di $A \times B$. Chi è (a meno di isomorfismi) l'anello quoziente $(A \times B)/U$?

5. Siano A e B due anelli. Sia I un ideale di A e J un ideale di B. Provare che $I \times J$ è un ideale di $A \times B$. Provare che $(A \times B)/(I \times J)$ è un anello isomorfo a $A/I \times B/J$.

6. Siano A e B due anelli. Siano $p : A \times B \longrightarrow A$ e $q : A \times B \longrightarrow B$ le applicazioni date, rispettivamente, da $p(a, b) = a$ e $q(a, b) = b$. Provare che sono omomorfismi di anelli.
Facoltativo: Sia $U \subseteq A \times B$ un ideale di $A \times B$. Provare che esiste un ideale I di A e un ideale J di B tali che $U = I \times J$.