

ALGEBRA 2  
Esercizi 6 - 15 novembre 2018

1. Sia  $A$  un anello in cui è definito il massimo comun divisore degli elementi. Provare che, per ogni  $a, b, c$  non nulli, vale:

$$\text{mcd}(ac, bc) = c \text{mcd}(a, b)$$

Sia poi  $\text{mcd}(a, b) = 1$ . Provare che

$$\text{mcd}(a, bc) = \text{mcd}(a, c)$$

2. Sia  $K$  un campo. Provare che se  $f \in K[x]$  è irriducibile, allora il polinomio  $g = f(x + 1)$  è irriducibile. Cercare poi di generalizzare questo risultato (a proprio piacimento).
3. Sia  $A = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$  (l'anello prodotto). Calcolare la caratteristica di  $A$ . Più in generale, sia  $A$  un anello di caratteristica  $r$  e  $B$  un anello di caratteristica  $s$ . Trovare la caratteristica di  $A \times B$ .
4. Trovare tutti i polinomi irriducibili di grado 3 di  $\mathbb{Z}_2[x]$ .
5. Provare che il polinomio  $x^5 + 2x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$  è irriducibile (conviene aiutarsi con il risultato dell'esercizio precedente).
6. Provare che  $x^5 + 2x^3 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$  è irriducibile (conviene aiutarsi con il risultato dell'esercizio precedente).