

ALGEBRA 2
Esercizi 1 - 14 ottobre 2021

1. Sia G un insieme finito in cui è definito un prodotto che è associativo e possiede un elemento unitario. Si supponga inoltre che per il prodotto di G valga la seguente proprietà: per ogni g, h, k , se $gh = gk$ allora $h = k$. Provare che G è un gruppo.
2. Si consideri il seguente elemento del gruppo S_4 (gruppo delle permutazioni di 4 elementi indicati con 1, 2, 3, 4):

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Si trovi l'inverso di g .

3. Si ricordi che, dato il gruppo delle permutazioni S_n , si chiama *scambio* di S_n una permutazione che lascia fissi tutti gli elementi di S_n tranne due (diciamo a e b), che vengono scambiati tra loro. Uno scambio di a e b si indica di solito con (a, b) . Ad esempio $(2, 5)$ in S_5 è la permutazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Uno scambio si chiama anche un *2-ciclo*. Considerate le seguenti due permutazioni (di S_3 e S_5) date da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

scriverle come prodotto di scambi.

4. Il gruppo G ha 12 elementi: $1, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ che si moltiplicano tra loro secondo la seguente tabella di moltiplicazione:

\cdot	1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
1	1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	a	1	c	b	g	f	e	d	j	k	h	i
b	b	c	1	a	e	d	g	f	k	j	i	h
c	c	b	a	1	f	g	d	e	i	h	k	j
d	d	e	f	g	h	i	j	k	1	a	b	c
e	e	d	g	f	k	j	i	h	b	c	1	a
f	f	g	d	e	i	h	k	j	c	b	a	1
g	g	f	e	d	j	k	h	i	a	1	c	b
h	h	i	j	k	1	a	b	c	d	e	f	g
i	i	h	k	j	c	b	a	1	f	g	d	e
j	j	k	h	i	a	1	c	b	g	f	e	d
k	k	j	i	h	b	c	1	a	e	d	g	f

(la tabella va letta in questo modo: il prodotto $x \cdot y$ è dato dal punto d'incontro della riga che comincia con la x con la colonna che ha per primo valore in alto la y . Ad esempio $c \cdot e = g$). Provare che il gruppo G non è commutativo. Trovare l'ordine dell'elemento a e dell'elemento d . Provare che il sottoinsieme $H = \{1, a, b, c\}$ di G è un sottogruppo. Trovare i laterali destri di H e i laterali sinistri. Verificare che H è normale. Trovare la tabella di moltiplicazione del gruppo G/H .

Sia $K = \{1, a\}$. Provare che K è un sottogruppo di G . Trovare i laterali destri di K . Calcolare Kd e dK e dedurre che K non è un sottogruppo normale.

5. Sia A un anello e I un ideale di A . Provare che il prodotto dato da $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$ è ben definito in A/I e permette di dotare A/I della struttura di anello.
6. Sia A un anello (commutativo, unitario) che non ha altri ideali, al di fuori dei due banali. Provare che A è un campo.