Algebra 2

Esercizi 6 - 14 novembre 2019

1. Sia $A$ un dominio d'integrità in cui è definito il massimo comun divisore degli elementi. Provare che, per ogni $a, b, c$ non nulli, vale:

$$\operatorname{mcd}(ac, bc) = c \operatorname{mcd}(a, b)$$

   Sia poi $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$. Provare che

$$\operatorname{mcd}(a, bc) = \operatorname{mcd}(a, c)$$

2. Sia $K$ un campo. Provare che se $f \in K[x]$ è irriducibile, allora il polinomio $g = f(x + 1)$ è irriducibile. Cercare poi di generalizzare questo risultato (a proprio piacimento).

3. Sia $A = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ (l'anello prodotto). Calcolare la caratteristica di $A$. Più in generale, sia $A$ un anello di caratteristica $r$ e $B$ un anello di caratteristica $s$. Trovare la caratteristica di $A \times B$.

4. Ricordare che se $A$ è un anello, un ideale $\mathcal{P}$ di $A$ si dice primo se vale la condizione:

$$ab \in \mathcal{P} \Longrightarrow a \in \mathcal{P} \text{ o } b \in \mathcal{P} \quad \forall a, b \in A$$

   Provare che:

   - $\mathcal{P}$ è un ideale primo se e solo se l'anello $A/P$ è un dominio d'integrità;
   - provare che se $\mathcal{M}$ è un ideale massimale, allora è anche un ideale primo (ricordare che $\mathcal{M}$ ideale massimale significa: $\mathcal{M}$ è un ideale proprio e se $I$ è un ideale di $A$ che contiene $\mathcal{M}$ allora $I = \mathcal{M}$ oppure $I = A$).
   - provare che in $K[x]$ (con $K$ campo) un ideale è primo se e solo se è massimale.

5. Dopo aver spiegato perchè il polinomio $f = x^2 + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ è irriducibile, trovare l'inverso dell'elemento $[x + 1] \in \mathbb{Q}[x]/(f)$.