ALGEBRA 2

Esercizi 1 - 11 ottobre 2018

1. Siano A e B due anelli. Sull'insieme $A \times B$ si definisca la somma e il prodotto componente per componente (quindi, per esempio, $(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$). Provare che $A \times B$ è un anello. Provare che se A e B sono unitari, anche $A \times B$ è unitario.

2. Si consideri l'anello $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (definito come nel precedente esercizio). Descrivere tutti i divisori dello zero e tutti gli elementi unitari di A.

3. Sia A un anello e $S \subseteq A$ un sottoinsieme finito. Supponiamo che $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Provare che vale:

$$(S) = \{a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

(Dove con (S) si indica l'ideale generato da S, cioè il più piccolo ideale di A che contiene l'insieme S).

4.* Sia $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ fissato, sia X_r l'intervallo $[0, r]$ della retta reale. Sia $A_r = \{f : X_r \longrightarrow \mathbb{R}\}$ (cioè l'insieme di tutte le funzioni da X_r in $\mathbb{R}$). Dati $f, g \in A_r$, si definisca $f + g$ la funzione tale che $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e analogamente per il prodotto. Provare che A_r con la somma e il prodotto ora detti, è un anello commutativo, unitario. Chi sono gli elementi invertibili di A_r?
In particolare in A_2 si prenda la funzione

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{se } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Come si può descrivere l'ideale (u)? Come si può descrivere l'anello quoziente $A_2/(u)$?