Algebra 2

Esercizi 7 - 10 novembre 2023

1. Sia $f \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio monico (cioè il coefficiente direttivo di f vale 1). Provare che se f ha radici razionali, allora tali radici sono intere. Provare che se f ha fattori lineari, allora sono della forma $x - a$ con $a \in \mathbb{Z}$.

2. Sia $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Dire per quali valori di a e b il polinomio è riducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

3. Provare che il polinomio $x^5 + 8x^3 + 6x^2 + 10 \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

4. Provare che il polinomio:
$$x^4 + 3/7x^3 - 21/10x^2 + 6/5 \in \mathbb{Q}[x]$$
è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

5. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Si consideri il polinomio:
$$3x^5 + a(a+1)x^4 + b(b+3)x^2 + 6 \in \mathbb{Z}[x]$$
Dire per quali valori di a e b è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ e per quali valori di a e b è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

6. Sia $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[x]$ un isomorfismo di anelli. Provare che se $f \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile, allora $\phi(f)$ è irriducibile. Usare opportunamente questa osservazione e il criterio di Eisenstein per provare che $x^4+4x^3+6x^2+4x+3$ e $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 6x + 5$ sono irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$.

7. Sia $K = \mathbb{Z}_p(x)$, cioè K è il campo dei quozienti del dominio $\mathbb{Z}_p[x]$ (gli elementi di K sono espressioni del tipo f/g, dove $f, g \in \mathbb{Z}_p[x]$, $g \neq 0$). Mostrare che K ha caratteristica p. Mostrare che K è infinito. Provare che non esiste nessun elemento $f/g \in K$ tale che $x = (f/g)^p$. Quindi K è un esempio di campo non perfetto.
Suggerimento:
per provare che non può succedere che $x = (f/g)^p$, si supponga che $g^p x = f^p$. Questa uguaglianza è tra elementi di $\mathbb{Z}_p[x]$ e $\mathbb{Z}_p[x]$ è un UFD...