INTEGRALI DOPPI

(1) Sia T il triangolo piano di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,0)$. Si calcoli l'integrale

$$\iint_T (x^2 - y^2)\ dx\ dy.$$

Esprimiamo dapprima algebricamente gli spigoli del triangolo T. Il lato orizzontale giace sulla retta $y = 0$, i due lati obliqui rispettivamente sulle rette $y = x$ e $y = -x + 2$. Possiamo quindi esprimere T come:

$$T = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1, y \le x \le 2 - y\ \}.$$

Per il Teorema di riduzione possiamo scrivere

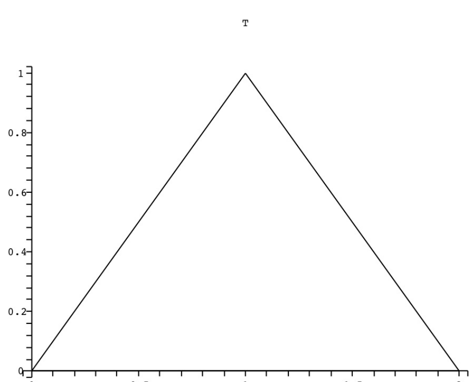
$$\iint_T (x^2 - y^2)\ dx\ dy \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (x^2 - y^2) dx \right)\ dy.$$

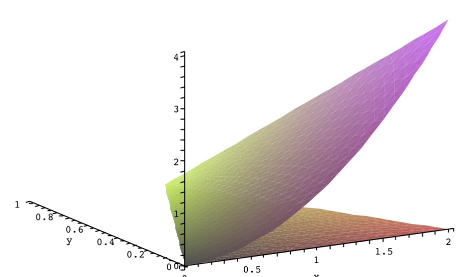
Calcoliamo prima l'integrale definito

$$\int_y^{2-y} (x^2 - y^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - xy^2 \right]_y^{2-y} = \frac{(2-y)^3}{3} - (2-y)y^2 - \frac{y^3}{3} + y^3 = \frac{8}{3} - 4y + \frac{4}{3}y^3.$$

Determiniamo ora

$$\int_0^1 \frac{8}{3} - 4y + \frac{4}{3}y^3\ dy = \left[\frac{8}{3}y - 2y^2 + \frac{1}{3}y^4 \right]_0^1 = \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{3} = 1.$$





(2) Sia Q il quadrato di vertici $(1,1)$, $(2,1)$,$(2,2)$ e $(1,2)$. Si determini

$$\iint_Q \frac{y}{x}\ dx\ dy.$$

Abbiamo $Q = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. Quindi

$$\iint_Q \frac{y}{x}\ dx\ dy = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{y}{x}\ dx \right)\ dy =$$

$$\int_1^2 (y\ \ \ln x)_1^2\ dy = \int_1^2 (y\ \ \ln 2)\ dy = \ln 2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{2} \ln 2\ .$$