Corso di laurea in Geologia
Istituzioni di matematiche
Esercizi n. 5

Determinare il grafico delle funzioni sotto indicate, rispondendo, quando possibile, ai seguenti punti:

- Dove è definita la funzione (detto anche insieme di definizione o campo di esitenza). Regole utili:
  - un denominatore non può mai essere 0;
  - se un'espressione è dentro l'operatore di radice quadrata (o una radice ad indice pari), l'espressione stessa deve essere ≥ 0;
  - se un'espressione è dentro l'operatore di log, l'espressione deve essere > 0.
- Dove la funzione è positiva e dove è negativa (se fattibile);
- Eventuali punti notevoli;
- dove la funzione è crescente, dove è decrescente, eventuali punti di massimo e minimo relativo e assoluto. Regole utili:
  - Se in un intervallo la derivata della funzione è ≥ 0, (≤ 0), in quell'intervallo la funzione è crescente (risp. decrescente).
  - Se c'è un punto x_0 tale che in esso la derivata si annulla, mentre alla sua sinistra la derivata è ≤ 0 e alla sua destra la sua derivata è ≥ 0, allora il punto è di minimo relativo;
  - Se c'è un punto x_0 tale che in esso la derivata si annulla, mentre alla sua sinistra la derivata è ≥ 0 e alla sua destra la sua derivata è ≤ 0, allora il punto è di massimo relativo;
  - Un altro modo per trovare i punti di minimo e massimo relativo è il seguente: se in x_0 la derivata della funzione si annulla, mentre la derivata seconda (sempre in x_0) è positiva, allora il punto è di minimo relativo; se invece la derivata seconda è nagativa, il punto è di massimo relativo.
- Concavità e convessità della funzione. Punti di flesso. Regole utili:
  - Se in un intervallo la derivata seconda della funzione è ≥ 0, allora in quell'intervallo la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto: $\smile$, se la derivata seconda è ≤ 0, allora la funzione ha la concavità rivolta verso il basso: $\frown$. Non sempre è facile determinare il segno della derivata seconda;
  - Se in x_0 la derivata seconda si annulla, mentre alla sua sinistra la derivata seconda è positiva e alla sua destra è negativa (o viceversa), x_0 è un punto di flesso.

- Eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui. Regole utili:
  - Solitamente gli asintoti verticali vanno ricercati nei punti in cui si annullano dei denominatori. Se x_0 è un punto in cui un denominatore della funzione si annulla, va studiato il $\lim_{x\to x_0^-}$ e il $\lim_{x\to x_0^+}$ della funzione. Se uno dei due (o entrambi) sono infiniti, la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale;
  - un altro caso di asintoti verticali si può avere per quei valori x_0 per cui l'argomento di un logaritmo tende a zero (da destra);
  - gli asintoti orizzontali ci sono se il $\lim_{x\to+\infty}$ o il $\lim_{x\to-\infty}$ della funzione è finito;
  - gli asintoti obliqui vanno cercati calcolando:

    $$m = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x \quad \text{e, se esiste } m, \quad q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$$

    se sia m, sia q esistono e sono numeri finiti, la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo (stesso discorso per $\lim_{x\to-\infty}$).
  - Se si sono trovati assintoti orizzontali, non ci possono essere asintoti obliqui.
- Tutti i dati trovati devono essere coerenti.

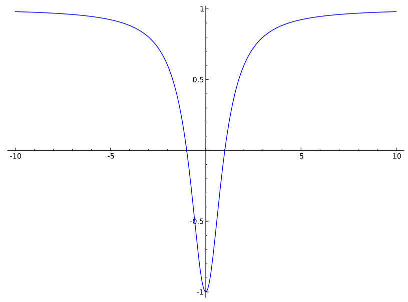
Funzioni.

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad \frac{x^2-5}{x-3}, \quad x^4\log(x), \quad \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}, \quad (x^2-3)\mathrm{e}^x, \quad (x^2-5)\mathrm{e}^{x^2}, \quad \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$$

Cenno di soluzioni nelle prossime pagine.

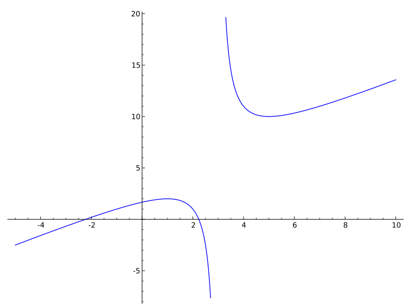
Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad \frac{4\,x}{\left(x^2+1\right)^2}, \quad -\frac{4\left(3\,x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$



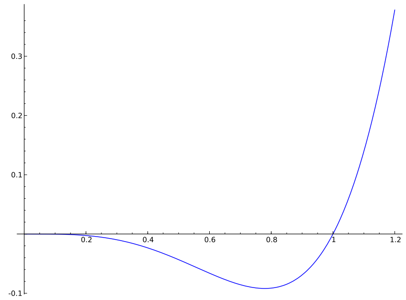
Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$\frac{x^2-5}{x-3}, \quad \frac{(x-1)(x-5)}{\left(x-3\right)^2}, \quad \frac{8}{\left(x-3\right)^3}$$



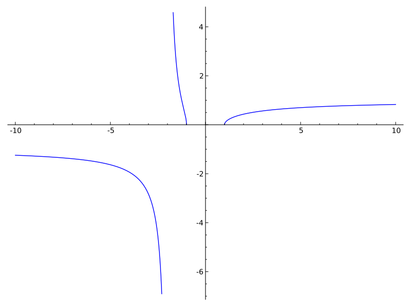
Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$x^4 \log\left(x\right), \quad x^3(4\,\log\left(x\right)+1), \quad x^2(12\,\log\left(x\right)+7)$$



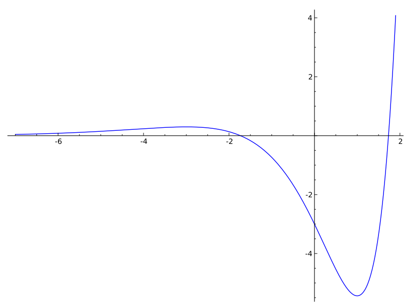
Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}, \quad \frac{2\,x+1}{\sqrt{x^2-1}(x+2)^2}, \quad -\frac{4\,x^3+3\,x^2+2}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}(x+2)^3}$$



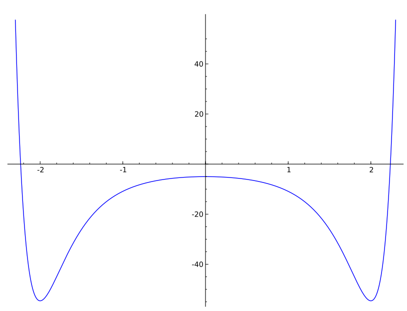
Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$\left(x^2-3\right)e^x, \quad (x+3)(x-1)e^x, \quad \left(x^2+4\,x-1\right)e^x$$



Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$\left(x^2-5\right)e^{x^2}, \quad 2\,(x+2)(x-2)xe^{x^2}, \quad 2\left(2\,x^4-5\,x^2-4\right)e^{x^2}$$



Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2+3}, \quad -\frac{3\,(x+1)(x-1)}{2\,(x^2+3)^2\sqrt{x}}, \quad \frac{3\left(5\,x^4-18\,x^2-3\right)}{4\,(x^2+3)^3 x^{\frac{3}{2}}}$$