

Corso di laurea in Geologia
Istituzioni di matematiche
Esercizi n. 1516/26

Determinare il grafico delle funzioni sotto indicate, rispondendo, per quando possibile, ai seguenti punti:

- Dove è definita la funzione (detto anche insieme di definizione o campo di esistenza). Regole utili:
 - un denominatore non può mai essere 0;
 - se un'espressione è dentro l'operatore di radice quadrata (o una radice ad indice pari), l'espressione stessa deve essere ≥ 0 ;
 - se un'espressione è dentro l'operatore di log, l'espressione deve essere > 0 .
- Dove la funzione è positiva e dove è negativa (se fattibile);
- Eventuali punti notevoli;
- dove la funzione è crescente, dove è decrescente, eventuali punti di massimo e minimo relativo e assoluto. Regole utili:
 - Se in un intervallo la derivata della funzione è ≥ 0 , (≤ 0), in quell'intervallo la funzione è crescente (risp. decrescente).
 - Se c'è un punto x_0 tale che in esso la derivata si annulla, mentre alla sua sinistra la derivata è ≤ 0 e alla sua destra la sua derivata è ≥ 0 , allora il punto è di minimo relativo;
 - Se c'è un punto x_0 tale che in esso la derivata si annulla, mentre alla sua sinistra la derivata è ≥ 0 e alla sua destra la sua derivata è ≤ 0 , allora il punto è di massimo relativo;
 - Un altro modo per trovare i punti di minimo e massimo relativo è il seguente: se in x_0 la derivata della funzione si annulla, mentre la derivata seconda (sempre in x_0) è positiva, allora il punto è di minimo relativo; se invece la derivata seconda è negativa, il punto è di massimo relativo.
- Concavità e convessità della funzione. Punti di flesso. Regole utili:
 - Se in un intervallo la derivata seconda della funzione è ≥ 0 , allora in quell'intervallo la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto: \cup , se la derivata seconda è ≤ 0 , allora la funzione ha la concavità rivolta verso il basso: \cap . Non sempre è facile determinare il segno della derivata seconda;
 - Se in x_0 la derivata seconda si annulla, mentre alla sua sinistra la derivata seconda è positiva e alla sua destra è negativa (o viceversa), x_0 è un punto di flesso.

- Eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui. Regole utili:
 - Solitamente gli asintoti verticali vanno ricercati nei punti in cui si annullano dei denominatori. Se x_0 è un punto in cui un denominatore della funzione si annulla, va studiato il $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$ e il $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$ della funzione. Se uno dei due (o entrambi) sono infiniti, la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale;
 - un altro caso di asintoti verticali si può avere per quei valori x_0 per cui l'argomento di un logaritmo tende a zero (da destra);
 - gli asintoti orizzontali ci sono se il $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ o il $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ della funzione è finito;
 - gli asintoti obliqui vanno cercati calcolando:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x \quad \text{e, se esiste } m, \quad q = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx$$
 se sia m , sia q esistono e sono numeri finiti, la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo (stesso discorso per $\lim_{x \rightarrow -\infty}$).
 - Se si sono trovati asintoti orizzontali, non ci possono essere asintoti obliqui.
- Tutti i dati trovati devono essere coerenti.

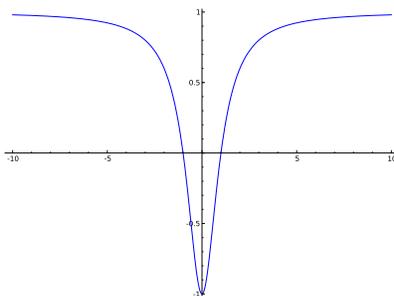
Funzioni.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad \frac{x^2 - 5}{x - 3}, \quad x^4 \log(x), \quad \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 2}, \quad (x^2 - 3)e^x, \quad (x^2 - 5)e^{x^2}, \quad \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3}$$

Cenno di soluzioni nelle prossime pagine.

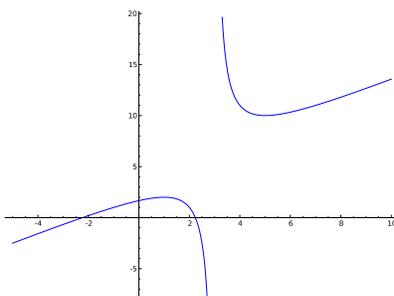
Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, \quad -\frac{4(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$



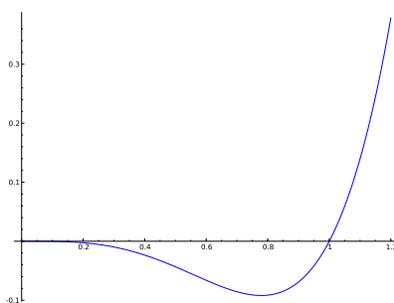
Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$\frac{x^2 - 5}{x - 3}, \quad \frac{(x - 1)(x - 5)}{(x - 3)^2}, \quad \frac{8}{(x - 3)^3}$$



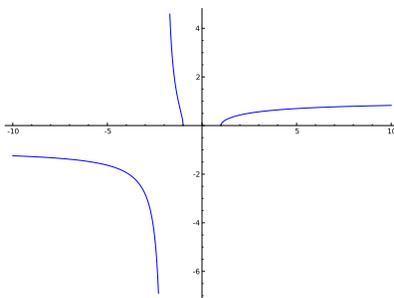
Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$x^4 \log(x), \quad x^3(4 \log(x) + 1), \quad x^2(12 \log(x) + 7)$$



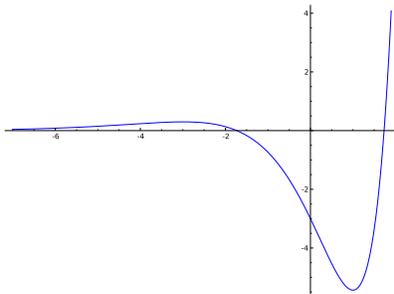
Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 2}, \quad \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}(x + 2)^2}, \quad -\frac{4x^3 + 3x^2 + 2}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}(x + 2)^3}$$



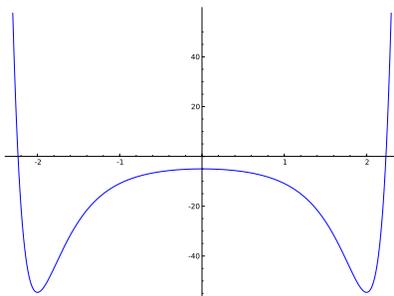
Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$(x^2 - 3)e^x, \quad (x + 3)(x - 1)e^x, \quad (x^2 + 4x - 1)e^x$$



Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$(x^2 - 5)e^{x^2}, \quad 2(x + 2)(x - 2)xe^{x^2}, \quad 2(2x^4 - 5x^2 - 4)e^{x^2}$$



Funzione, derivata prima, derivata seconda e grafico:

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3}, \quad -\frac{3(x+1)(x-1)}{2(x^2+3)^2\sqrt{x}}, \quad \frac{3(5x^4 - 18x^2 - 3)}{4(x^2+3)^3x^{\frac{3}{2}}}$$

