

Corso di laurea in Geologia
Istituzioni di matematiche A
a.a. 2017–18, esercizi n. 9

1. Provare che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -x + 4$ è iniettiva e suriettiva. Calcolare la sua inversa $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e calcolare $f(g(y))$ e $g(f(x))$.
2. Trovare la soluzione dell'equazione $|x - 3| = 8$.
3. Data la matrice quadrata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

calcolare $\det(A)$ e A^{-1} .

4. Sia A una matrice quadrata di ordine 3 e tale che $\det(A) = a^2 - 2a - 3$. Per quali valori di a la matrice A è invertibile?
5. Dato il vettore $v = (3, 2)$, quali sono i vettori del piano ortogonali a v e aventi lo stesso modulo di v ?
6. Trovare l'angolo formato dalle due rette del piano di equazioni $x + y + 1 = 0$ e $x - 3 = 0$.
7. Dato il piano π di equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 2\lambda - \mu + 2 \\ y = \lambda - \mu - 2 \\ z = \lambda + \mu + 1 \end{cases}$$

e la retta r di equazione:

$$\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

trovare il punto P in cui π ed r si incontrano. Calcolare poi l'equazione (in forma parametrica) della retta s passante per P e ortogonale a π .

8. Data la retta di equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -3\lambda + 1 \end{cases}$$

trovare l'equazione cartesiana del piano ortogonale a tale retta e passante per il punto $(2, 0, -1)$.

9. Trovare la retta dello spazio passante per i punti $(2, -1, 3)$ e $(3, 2, 0)$.

10. Trovare il piano dello spazio passante per i punti: $(1, -2, 1)$, $(3, -1, 1)$, $(-2, 1, 0)$.
11. Sia $P(x, y) = x$ è amico di y . Allora:

$$\forall x \forall y \exists z \text{ tale che } A(x, z) \wedge A(y, z)$$

significa:

- (a) “due persone qualunque hanno un amico”;
- (b) “tre persone qualunque hanno sempre un amico comune”;
- (c) “due persone qualunque hanno sempre un amico comune”;
- (d) “c’è sempre una persona che è amica di tutti”;
- (e) “se una persona ha un amico, allora ne ha anche un altro”.

12. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{5n^2 - 7n + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3(-1)^n + 3n^2}{2n^2 + 3}$$

13. Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x) \sin(7x)}{\sin(3x) \tan(2x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x) + \cos(x) - 1}{\cos(x) - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos(3x)}{x + 1}$$

14. Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$f(x) = \begin{cases} 2/x & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si noti che $f(-1) = -2$ e $f(1) = 2$. C’è qualche teorema che garantisce che in $[-1, 1]$ f ha almeno uno zero?

15. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{se } x \geq 1 \\ x + b & \text{se } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Rispondere:

- (a) in quali punti di \mathbb{R} f è continua per ogni valore di a e b ?
- (b) Per quali valori di a e b f è continua in tutto \mathbb{R} ?
16. Con $\min(a, b)$ si indica il minimo tra i numeri a e b . Così, ad esempio, $\min(-2, 1) = -2$, $\min(4, 5) = 4$, $\min(3, -1) = -1$, ecc. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da: $f(x) = \min(1 - x^2, x)$. Tracciare sommariamente il grafico di f e trovare i suoi punti di minimo e di massimo assoluti.

17. Sia $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$f(x) = \min(3 \sin(x), 1)$$

Trovare i massimi e minimi assoluti e relativi di f .

18. Quali teoremi si usano per dire che la funzione

$$f(x) = \frac{9x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 2}$$

è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$?

19. Enunciare l'assioma di Dedekind sui numeri reali.

20. Cosa significa dire che una matrice A è invertibile?

21. Data una successione $(a_n)_n$, dare la definizione di:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

22. Dare la definizione (incluse le ipotesi necessarie) di:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

23. Dare la definizione di funzione continua in un punto di \mathbb{R} .

24. Dare la definizione di punto di minimo relativo di una funzione (specificare prima di tutto dove tale funzione deve essere definita).

25. Scrivere l'enunciato del teorema di Weierstrass sull'esistenza di massimi e minimi assoluti per una funzione opportuna.

26. Enunciare il teorema della permanenza del segno (per una opportuna funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$).