

Corso di laurea in Geologia
Istituzioni di matematiche
Esercizi n. 11

Trovare i massimi relativi, i minimi relativi e i punti di sella delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 2y^2$;
2. $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{(x-2y)}$;
3. $f(x, y) = -8x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 1$.

Soluzioni nella pagina seguente.

Soluzioni

1. Funzione: $f(x, y) = x^3 - 4xy + 2y^2 + y$.
 $\nabla(f) = (3x^2 - 4y, -4x + 4y + 1)$ Punti critici: $(1/3, 1/12)$, $(1, 3/4)$.
Matrice hessiana: $\begin{pmatrix} 6x & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. Determinante matrice hessiana: $24x - 16$. Determinante matrice hessiana nei punti critici: -8 e 8 . Valori della derivata seconda rispetto a x della funzione nei punti critici: $f_{xx}(1/3, 1/12) = 2$, $f_{xx}(1, 3/4) = 6$.
Conclusione: Il punto $(1/3, 1/12)$ è un punto di sella. Il punto $(1, 3/4)$ è un punto di minimo relativo.

2. Funzione: $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{(x-2y)}$.
 $\nabla(f) = ((x^2 - y^2 + 2x)e^{(x-2y)}, -2(x^2 - y^2 + y)e^{(x-2y)})$ Punti critici: $(2/3, 4/3)$, $(0, 0)$. Matrice hessiana:

$$\begin{pmatrix} (x^2 - y^2 + 4x + 2)e^{(x-2y)} & -2(x^2 - y^2 + 2x + y)e^{(x-2y)} \\ -2(x^2 - y^2 + 2x + y)e^{(x-2y)} & 2(2x^2 - 2y^2 + 4y - 1)e^{(x-2y)} \end{pmatrix}.$$

Determinante matrice hessiana:

$$-2(5x^2 - 8xy + 5y^2 + 4x - 8y + 2)e^{(2x-4y)}$$

Determinante matrice hessiana nei punti critici: $4e^{(-4)}$ e -4 . Valori della derivata seconda rispetto a x della funzione nei punti critici: $f_{xx}(2/3, 4/3) = \frac{10}{3}e^{(-2)}$, $f_{xx}(0, 0) = 2$.

Conclusione: il punto $(2/3, 4/3)$ è un punto di minimo relativo; il punto $(0, 0)$ è una sella.

3. Funzione: $f(x, y) = -8x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 1$.
 $\nabla(f) = (-2(4x+1)(4x-1)x, 2(2y^2+1)y)$ Punti critici: $(0, 0)$, $(1/4, 0)$, $(-1/4, 0)$. Matrice hessiana:

$$\begin{pmatrix} -96x^2 + 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 + 2 \end{pmatrix}$$

Determinante matrice hessiana: $-4(48x^2 - 1)(6y^2 + 1)$. Determinante matrice hessiana nei punti critici: 4 , -8 e -8 . Valori della derivata seconda rispetto a x della funzione nei punti critici: $f_{xx}(0, 0) = 2$, $f_{xx}(1/4, 0) = -4$, $f_{xx}(-1/4, 0) = -4$.

Conclusione: il punto $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo mentre i punti $(1/4, 0)$ e $(-1/4, 0)$ sono punti di sella.