

Esempio di domande per il test intermedio.

Rispondere alle seguenti domande. Le risposte vanno giustificate in modo sintetico.

1. Siano f e g due funzioni tali che $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ (dove I è un intervallo di \mathbb{R} e x_0 è un punto interno ad I) e sia $g(x) < f(x)$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$. Cosa si può dire del $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$?

2. Sia

$$a_n = \frac{3n^2 + n + 1}{2n^2 + 3n - 1}$$

Quanto vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$?

3. Scrivere l'enunciato preciso del teorema che lega il limite (per $n \rightarrow +\infty$) di una successione a_n e una successione b_n con il limite della successione $a_n + b_n$.
4. Sia $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e sia $g(x) \geq f(x) + x$. Quanto vale il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$?
5. Dare un esempio di una successione a_n tale che $a_n \rightarrow +\infty$, una successione b_n tale che $b_n \rightarrow +\infty$ e tale che valga:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$$

e un altro esempio con le stesse ipotesi, ma in cui il limite vale $+\infty$.

6. Calcolare:

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \quad \lim_{n \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

7. Dare la definizione di funzione continua in un punto x_0 .
8. Dato il vettore $v = (4, 3)$ trovare tutti i vettori ortogonali a v e di modulo 5.
9. Verificare, usando la definizione di limite, che vale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n+1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$$

10. Dare la definizione di vettori ortogonali in \mathbb{R}^3 .