

Assiomi che definiscono i numeri reali

L'insieme dei numeri reali si indica con il simbolo \mathbb{R} . In \mathbb{R} sono definite due operazioni: somma (si indica con $+$) e prodotto (si indica con \cdot e talvolta il simbolo viene omissso).

Le proprietà che definiscono \mathbb{R} sono:

1. La somma e il prodotto sono associativi, cioè per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ vale:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

2. La somma e il prodotto sono commutativi, cioè per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale:

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$$

3. esiste l'elemento neutro per la somma (si indica con 0) e l'elemento neutro del prodotto (si indica con 1). Per essi valgono le seguenti condizioni, per ogni $a \in \mathbb{R}$:

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$$

4. Le due operazioni di somma e prodotto sono legate dalla seguente relazione: per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ vale:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

5. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento di \mathbb{R} , che si indica con $-a$ (detto l'opposto di a) tale che:

$$a + (-a) = 0.$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, esiste un elemento in \mathbb{R} che si indica con a^{-1} (o con $1/a$) tale che:

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Nell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali è poi definita una relazione d'ordine che si indica con $<$ che soddisfa alle seguenti proprietà:

6. per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale una ed una sola delle seguenti condizioni:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a$$

7. (proprietà transitiva) Se vale $a < b$ e $b < c$, allora vale: $a < c$.

8. Se vale $a < b$, allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$ vale:

$$a + c < b + c$$

9. Se $0 < a$ e $0 < b$, allora $0 < a \cdot b$.

Talvolta si scrive $a > b$ al posto di $b < a$. Il simbolo $a \leq b$ (o $a \geq b$) significa $a < b$ o $a = b$ (rispettivamente: $a > b$ o $a = b$). Gli elementi $a \in \mathbb{R}$ tali che $0 < a$ si dicono positivi, gli elementi di \mathbb{R} tali che $a < 0$ si dicono negativi.

Definizione Due sottoinsiemi di \mathbb{R} non vuoti A e B tali che

- $A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B = \emptyset$;
- per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si ha: $a < b$

si dice una sezione di \mathbb{R} .

Se A, B sono una sezione di \mathbb{R} , un elemento $s \in \mathbb{R}$ si dice un elemento separatore della sezione se per ogni $a \in A$ e ogni $b \in B$ vale:

$$a \leq s \leq b$$

10 (Assioma di Dedekind) Data una qualunque sezione A, B dell'insieme dei numeri reali, esiste ed è unico l'elemento separatore della sezione.