Un promemoria su alcune formule

che ci piacerebbe fossero vere, ma...

In queste note, ci proponiamo di esaminare il seguente quesito: è possibile scambiare tra loro due tra le seguenti operazioni?

$$\lim_{x \to x_0} \qquad \frac{\partial}{\partial x} \qquad \int_a^b \qquad \sum_{n=0}^{\infty}$$

Per studiare questo problema, supporremo nel seguito che le operazioni di volta in volta prese in considerazione siano ben definite. Mostreremo con degli esempi che, anche sotto questa ipotesi, non sempre lo scambio delle operazioni è possibile. Tale scambio si può in generale effettuare sotto ulteriori ipotesi, alcune delle quali verranno suggerite per ciascun caso, solo a titolo di promemoria. Raccomandiamo di consultare i vari testi in materia per una formulazione rigorosa dei singoli teoremi.

1 Due limiti

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) \ ?$$

In generale, è falsa: ad esempio, si prenda $x_0 = y_0 = 0$ e

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ .$$

La formula invece vale quando $\lim_{x \to x_0} f(x, y)$ è uniforme rispetto a y (in un intorno di y_0) o $\lim_{y \to y_0} f(x, y)$ è uniforme rispetto a x (in un intorno di x_0).

2 Limite e derivata

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{d}{dy} \lim_{x \to x_0} f(x, y) \ ?$$

In generale, è falsa: ad esempio, si prenda $x_0 = 0$ e

$$f(x, y) = \begin{cases} x \arctan(\frac{y}{x}) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

In tal caso si ha una disuguaglianza per $y = 0$. La formula è invece valida quando le funzioni $f(x, y)$ e le loro derivate parziali $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ convergono uniformemente rispetto a y.

3 Limite e integrale

$$\lim_{x \to x_0} \int_a^b f(x,y)\,dy = \int_a^b \lim_{x \to x_0} f(x,y)\,dy \ ?$$

In generale, è falsa: ad esempio, si prenda $a = 0$, $b = 1$ e

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\pi}{|x-x_0|} \sin(\frac{\pi y}{|x-x_0|}) & \text{se } 0 < y < |x - x_0|, \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La formula è invece valida quando esiste una funzione integrabile $g(y)$ tale che $|f(x,y)| \leq g(y)$ per ogni (x,y) (teorema della convergenza dominata) oppure quando $f(x,y)$ è monotona in x (teorema della convergenza monotona).

4 Limite e serie

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to x_0} a_n(x) \ ?$$

In generale, è falsa: ad esempio, si prenda $x_0 = 0$ e

$$a_n(x) = \frac{(n+1)^2 x^2 - 1}{(n+1)^2 x^2 + 1} - \frac{n^2 x^2 - 1}{n^2 x^2 + 1}$$

(così ci si riconduce ad uno scambio di due limiti). La formula è invece valida quando la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ converge in modo uniforme rispetto a x (in un intorno di x_0).

5 Due derivate

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \ ?$$

In generale, è falsa: ad esempio, si prenda

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

In tal caso si ha una disuguaglianza per $x = y = 0$. La formula è invece valida quando le due derivate miste $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sono continue in (x,y) (teorema di Schwartz).

6 Derivata e integrale

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy\ ?$$

In generale, è falsa: ad esempio, si prenda $a = 0$, $b = 1$ e

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} e^{-x^2/y} & \text{se } y \neq 0, \\ \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

In tal caso si ha una disuguaglianza per $x = 0$. La formula è invece valida quando esiste una funzione integrabile $g(y)$ tale che $|\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)| \leq g(y)$ per ogni (x,y) (regola di Leibniz).

7 Derivata e serie

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n(x)\ ?$$

In generale, è falsa: ad esempio, si prenda

$$a_0(x) = \arctan(x) - x$$

e, per $n \geq 1$,

$$a_n(x) = \frac{\arctan((n+1)x)}{n+1} - \frac{\arctan(nx)}{n}$$

(così ci si riconduce ad uno scambio di limite e derivata). In tal caso si ha una disuguaglianza per $x = 0$. La formula è invece valida quando le due serie che vi compaiono convergono uniformemente rispetto a x (in un intorno di x_0).

8 Due integrali

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy\ ?$$

In generale, è falsa: ad esempio, si prenda $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$, e

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2} & \text{se } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2} & \text{se } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La formula è invece valida quando $f(x,y)$ è integrabile su $[0,1] \times [0,1]$ (teorema di Fubini).

9 Integrale e serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\, dx \ ?$$

In generale, è falsa: ad esempio, si prenda $a = 0$, $b = 1$ e

$$a_n(x) = g_{n+1}(x) - g_n(x),$$

dove $g_0(x) = 0$ per ogni x e, per $n \geq 1$,

$$g_n(x) = \begin{cases} n\pi \sin(n\pi x) & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \ , \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(così ci si riconduce ad uno scambio di limite e integrale). La formula è invece valida quando $a_n(x) \geq 0$ per ogni x e per ogni n (teorema della convergenza monotona).

10 Due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} \ ?$$

In generale, è falsa: ad esempio, si prenda

$$a_{n,m} = \begin{cases} 2^{m-n} & \text{se } n > m, \\ 0 & \text{se } n = m, \\ 2^{n-m} & \text{se } n < m. \end{cases}$$

La formula è invece valida quando la funzione $f(x, y)$ definita da

$$f(x, y) = |a_{n,m}| \qquad \text{se} \qquad n \leq x < n + 1, \quad m \leq y < m + 1,$$

è integrabile su $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (teorema di Fubini).