Operatori in spazi di Hilbert

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. Alessandro Fonda

Università di Trieste, a.a. 2013/2014

1 Alcune premesse sugli spazi di Hilbert

1.1 Lo spazio di Hilbert

Sia H uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{K}$, che si supporrà essere il corpo dei numeri reali $\mathbb{R}$ o quello dei numeri complessi $\mathbb{C}$. È definito un prodotto scalare $H \times H \to \mathbb{K}$ che indicheremo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Esso è tale che, per ogni $f, g, h \in H$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, sono verificate le seguenti proprietà:

$$
\begin{aligned}
&a)\ \langle f, f \rangle \geq 0\,;\\
&b)\ \langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0\,;\\
&c)\ \langle f+g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle\,;\\
&d)\ \langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle\,;\\
&e)\ \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*\,,
\end{aligned}
$$

dove z^* indica il complesso coniugato di z ($z^* = z$ se $z \in \mathbb{R}$). Si noti che

$$\langle f, \alpha g \rangle = \alpha^* \langle f, g \rangle\,.$$

Poniamo, per ogni $f \in H$,

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}\,.$$

Teorema 1 *Per ogni $f, g \in H$, si ha:*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|\,\|g\|\,.$$

(**disuguaglianza di Schwarz**).

<u>Dimostrazione</u>. La disuguaglianza è sicuramente verificata se $g = 0$, essendo in tal caso $\langle f, g \rangle = 0$ e $\|g\| = 0$. Supponiamo quindi $g \neq 0$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$, si ha

$$0 \leq \|f - \alpha g\|^2 = \langle f - \alpha g, f - \alpha g \rangle = \|f\|^2 - \alpha^* \langle f, g \rangle - \alpha \langle g, f \rangle + |\alpha|^2 \|g\|^2\,.$$

Prendendo $\alpha = \frac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2}$, si ottiene

$$0 \leq \|f\|^2 - 2\frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\|g\|^2} + \frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\|g\|^4}\|g\|^2 = \|f\|^2 - \frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\|g\|^2}\,,$$

da cui la tesi. ■

Si ha che $\|\cdot\|$ è una norma su H:

$$\begin{aligned}
&a)\ \|f\| \geq 0\,;\\
&b)\ \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0\,;\\
&c)\ \|\alpha f\| = |\alpha|\ \|f\|\,;\\
&d)\ \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|\,.
\end{aligned}$$

Dimostriamo quest'ultima:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle\\
&= \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle\\
&= \|f\|^2 + 2\Re(\langle f,g\rangle) + \|g\|^2\\
&\leq \|f\|^2 + 2|\langle f,g\rangle| + \|g\|^2\\
&\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2\\
&= (\|f\| + \|g\|)^2\,.
\end{aligned}$$

Poniamo, per $f, g \in H$,

$$d(f,g) = \|f-g\|\,.$$

Si ha che $d(\cdot,\cdot)$ è una distanza che rende H uno spazio metrico:

$$\begin{aligned}
&a)\ d(f,g) \geq 0\,;\\
&b)\ d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g\,;\\
&c)\ d(f,g) = d(g,f)\,;\\
&d)\ d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)\,.
\end{aligned}$$

Diremo che H è uno spazio di Hilbert se, rispetto a tale distanza, H è completo. Nel seguito, H indicherà sempre uno spazio di Hilbert.

1.2 Alcuni esempi di spazi di Hilbert

Illustriamo quattro esempi importanti di spazi di Hilbert, che verranno ripresi anche in seguito.

1) Consideriamo l'insieme $\mathbb{K}^N$, con la seguente operazione: se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N)$ sono due suoi elementi,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \beta_k^* \,.$$

Si verificano facilmente le proprietà del prodotto scalare.

Notiamo che, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, abbiamo il prodotto scalare usuale, che genera la norma e la distanza euclidea. Sappiamo che in questo caso $\mathbb{R}^N$ è uno spazio metrico completo, quindi uno spazio di Hilbert.

Nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, scrivendo ogni α_k nella forma $\alpha_k = a_k + ib_k$, la norma associata al prodotto scalare sopra definito è

$$\|\alpha\| = \Big(\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^2 \Big)^{1/2} = \Big(\sum_{k=1}^{N} \big(a_k^2 + b_k^2 \big) \Big)^{1/2} .$$

Si può pertanto identificare $\mathbb{C}^N$ con $\mathbb{R}^{2N}$, per cui anche in questo caso abbiamo a che fare con uno spazio di Hilbert.

Si noti che, nel caso $N = 1$, il prodotto scalare è dato da $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha \beta^*$.

2) Consideriamo l'insieme $\ell^2(\mathbb{K})$, costituito dalle successioni $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ in $\mathbb{K}$ tali che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty \,.$$

Si può verificare che, per $\alpha = (\alpha_k)_{k \geq 1}$ e $\beta = (\beta_k)_{k \geq 1}$, ha senso porre

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k^* \,,$$

e che sono soddisfatte le proprietà del prodotto scalare. Si può inoltre dimostrare che $\ell^2(\mathbb{K})$, con tale prodotto scalare, è uno spazio di Hilbert.

3) Consideriamo l'insieme $L^2([a,b], \mathbb{K})$, costituito dalle funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, integrabili secondo Lebesgue, tali che anche $|f|^2$ sia integrabile. Si può verificare che, per $f, g \in L^2([a,b], \mathbb{K})$, ha senso porre

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)^* \, dx \,.$$

(In alcune applicazioni, potrebbe risultare utile moltiplicare l'integrale per un'opportuna costante.) Le proprietà del prodotto scalare sono di facile verifica, purché si convenga di identificare due funzioni qualora coincidano quasi ovunque. Si può inoltre dimostrare che $L^2([a,b], \mathbb{K})$, con tale prodotto scalare, è uno spazio di Hilbert. Qualora non ci sia pericolo di ambiguità, indicheremo tale spazio con $L^2(a,b)$.

Osserviamo che l'uso dell'integrale di Lebesgue è qui fondamentale. Se ad esempio considerassimo solamente funzioni integrabili secondo Riemann, non si avrebbe la completezza dello spazio.

4) Sull'insieme $W^{1,2}([a,b],\mathbb{K})$, costituito dalle funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, assolutamente continue con derivata f' in $L^2([a,b],\mathbb{K})$, si può definire il prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b [f(x)g(x)^* + f'(x)g'(x)^*]\, dx\,.$$

Si può dimostrare che, anche in questo caso, si tratta di uno spazio di Hilbert. Tale spazio viene spesso indicato, più semplicemente, con $W^{1,2}(a,b)$.

1.3 Alcune proprietà fondamentali

Si può verificare la seguente disuguaglianza:

$$\Big|\|f\| - \|g\|\Big| \leq \|f - g\|\,.$$

Ne segue che la norma è una funzione continua. Dalla disuguaglianza di Schwarz segue inoltre che il prodotto scalare è continuo nelle singole componenti. Se $(f_n)_n$ è una successione in H tale che $\lim_n f_n = f$, potremo quindi scrivere

$$\|f\| = \lim_n \|f_n\|\,, \qquad \langle f, g\rangle = \lim_n \langle f_n, g\rangle\,;$$

se inoltre la serie $\sum_{k=1}^\infty f_k$ converge, avremo

$$\left\langle \sum_{k=1}^\infty f_k, g\right\rangle = \left\langle \lim_n \sum_{k=1}^n f_k, g\right\rangle = \lim_n \left\langle \sum_{k=1}^n f_k, g\right\rangle = \lim_n \sum_{k=1}^n \langle f_k, g\rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle f_k, g\rangle.$$

Teorema 2 *Per ogni $f, g \in H$, si ha*

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2\,.$$

(**identità del parallelogramma**).

Dimostrazione. Essendo

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\Re(\langle f, g\rangle) + \|g\|^2\,,$$
$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - 2\Re(\langle f, g\rangle) + \|g\|^2\,,$$

sommando le due si ottiene l'identità cercata. ■

Qualora, per $f, g \in H$, si abbia $\langle f, g\rangle = 0$, diremo che f e g sono tra loro **ortogonali**. Più in generale, diremo che una famiglia $(f_k)_k$ in H (finita o infinita) è **ortogonale** se $\langle f_j, f_k\rangle = 0$ per ogni $j \neq k$.

Teorema 3 (di Pitagora) *Enunciamo tre situazioni, in ordine di generalità crescente.*
I) Se f e g sono ortogonali, allora

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2\,.$$

II) Se $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ è una famiglia ortogonale, allora

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2 .$$

III) Sia $(f_k)_k$ una successione di vettori a due a due ortogonali. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2 \text{ converge} \ ;$$

in tal caso, si ha:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2 .$$

Dimostrazione. I) Essendo $\langle f, g \rangle = 0$, si ha:

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\Re(\langle f, g \rangle) + \|g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 .$$

II) Si procede per induzione, usando I):

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2 + \ldots + f_{n+1}\|^2 &= \|(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) + f_{n+1}\|^2 \\ &= \|f_1 + f_2 + \ldots + f_n\|^2 + \|f_{n+1}\|^2 \\ &= (\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \ldots + \|f_n\|^2) + \|f_{n+1}\|^2 . \end{aligned}$$

III) Usando II), per ogni m, n si ha

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} f_k \right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} \|f_k\|^2 .$$

Essendo H completo, si può applicare il criterio di Cauchy per stabilire che, se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2$ converge, allora converge anche $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, e viceversa. Supponiamo ora che le due serie convergano. Allora, per la continuità della norma,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|^2 = \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2 .$$

■

1.4 Sottospazi

Un sottoinsieme $\mathcal{M}$ di H si dice **varietà lineare** se, comunque presi $f, g \in \mathcal{M}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, si ha che $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}$. Non è detto in generale che una varietà lineare sia uno spazio di Hilbert, in quanto la completezza si mantiene solamente se $\mathcal{M}$ è un insieme chiuso (ricordiamo che un insieme è chiuso se e solo se contiene il limite di ogni sua successione convergente). Diremo quindi che $\mathcal{M}$ è un **sottospazio** di H se è una varietà lineare chiusa.

Un esempio di varietà lineare che non sia un sottospazio è, in $L^2([a,b],\mathbb{K})$, l'insieme $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ delle funzioni continue. In effetti, si può dimostrare che la sua chiusura è tutto $L^2([a,b],\mathbb{K})$.

Teorema 4 *Se $\mathcal{M}$ è una varietà lineare, la sua chiusura $\overline{\mathcal{M}}$ è ancora una varietà lineare, e pertanto è un sottospazio.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in \overline{\mathcal{M}}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Esistono due successioni $(f_n)_n$ e $(g_n)_n$ tali che $f_n, g_n \in \mathcal{M}$ per ogni n e $\lim_n f_n = f$, $\lim_n g_n = g$. Allora $\alpha f_n + \beta g_n \in \mathcal{M}$, e $\lim_n(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha f + \beta g$, per cui $\alpha f + \beta g \in \overline{\mathcal{M}}$. ■

Teorema 5 *Se $(\mathcal{M}_k)_k$ è una famiglia (anche non numerabile) di sottospazi, allora la loro intersezione è ancora un sottospazio.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che l'intersezione di varietà lineari è una varietà lineare, e l'intersezione di insiemi chiusi è un insieme chiuso. ■

Corollario 6 *Dato un insieme $U \subseteq H$, esiste un unico sottospazio $\mathcal{M}$ tale che*

a) $\mathcal{M}$ contiene U,

b) se $\mathcal{M}'$ è un sottospazio che contiene U, allora $\mathcal{M}'$ contiene $\mathcal{M}$.

Dimostrazione. Si definisce $\mathcal{M}$ come intersezione di tutti i sottospazi contenenti l'insieme U. Si ha che $\mathcal{M}$ è un sottospazio e si verificano immediatamente a) e b). ■

L'insieme $\mathcal{M}$, la cui esistenza è stabilita nel teorema precedente, è il più piccolo sottospazio che contiene U; si dice che $\mathcal{M}$ è il **sottospazio generato** da U.

Dati due sottospazi $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$, l'insieme

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \{f + g : f \in \mathcal{M}_1, g \in \mathcal{M}_2\}.$$

è una varietà lineare, ma non sempre è un sottospazio. Confrontiamolo con il sottospazio generato dall'unione $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, che indichiamo con $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$.

Teorema 7 *Si ha:*

$$\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 = \overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}.$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M}_1$ che $\mathcal{M}_2$ sono contenuti in $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$. Essendo quet'ultimo una varietà lineare, anche $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ è contenuto in esso; essendo inoltre chiuso, avremo $\overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2} \subseteq \mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$.

Viceversa, sia $\mathcal{M}_1$ che $\mathcal{M}_2$ sono contenuti in $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$. Quindi anche la loro unione lo è. Ma $\overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}$ è un sottospazio, per il Teorema 4, quindi deve contenere $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$. ■

1.5 Sottospazi ortogonali

Diremo che due insiemi U e V sono ortogonali se

$$\forall f \in U \quad \forall g \in V \quad \langle f, g \rangle = 0\,.$$

Indicheremo con $U^\perp$ l'insieme dei vettori di H che risultano ortogonali ad ogni vettore di U.

Teorema 8 *$U^\perp$ è un sottospazio di H. Inoltre, $\overline{U}^\perp = U^\perp$.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in U^\perp$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Allora, per ogni $u \in U$, si ha

$$\langle \alpha f + \beta g, u \rangle = \alpha \langle f, u \rangle + \beta \langle g, u \rangle = 0\,,$$

per cui $\alpha f + \beta g \in U^\perp$. Quindi $U^\perp$ è una varietà lineare. Vediamo che è un insieme chiuso. Sia $(f_n)_n$ una successione in $U^\perp$ tale che $\lim_n f_n = f$. Allora, per ogni $u \in U$,

$$\langle f, u \rangle = \lim_n \langle f_n, u \rangle = 0\,,$$

per cui $f \in U^\perp$. Quindi $U^\perp$ è un sottospazio.

Siccome $U \subseteq \overline{U}$, si ha che $\overline{U}^\perp \subseteq U^\perp$. D'altra parte, se $f \in U^\perp$ e $g \in \overline{U}$, allora esiste una successione $(g_n)_n$ in U tale che $\lim_n g_n = g$; quindi

$$\langle f, g \rangle = \lim_n \langle f, g_n \rangle = 0\,;$$

ne segue che $f \in \overline{U}^\perp$, da cui $U^\perp \subseteq \overline{U}^\perp$. ∎

Teorema 9 *Se $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ sono due sottospazi ortogonali, allora*

$$\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2\,.$$

Inoltre, $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$, ossia ogni $f \in \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ si può scrivere in un unico modo come $f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in \mathcal{M}_1$ e $f_2 \in \mathcal{M}_2$.

Dimostrazione. Appoggiandoci al Teorema 7, dobbiamo dimostrare che l'insieme $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ è chiuso. Sia $(f_n)_n$ una successione in esso tale che $\lim_n f_n = f$. Possiamo scrivere $f_n = f_{n,1} + f_{n,2}$, con $f_{n,1} \in \mathcal{M}_1$ e $f_{n,2} \in \mathcal{M}_2$. Per Pitagora,

$$\|f_m - f_n\|^2 = \|f_{m,1} - f_{n,1}\|^2 + \|f_{m,2} - f_{n,2}\|^2\,,$$

e siccome $(f_n)_n$ è di Cauchy, lo sono di conseguenza anche $(f_{n,1})_n$ e $(f_{n,2})_n$. Quindi esistono i limiti $\lim_n f_{n,1} = \bar{f}_1$ e $\lim_n f_{n,2} = \bar{f}_2$, ed essendo $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ chiusi, si ha che $\bar{f}_1 \in \mathcal{M}_1$ e $\bar{f}_2 \in \mathcal{M}_2$. Ne segue che $f = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 \in \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$. Questo dimostra che $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ è chiuso.

Supponiamo che si possa scrivere $f = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$, con $\bar{f}_1, \tilde{f}_1 \in \mathcal{M}_1$ e $\bar{f}_2, \tilde{f}_2 \in \mathcal{M}_1$. Per Pitagora, si ha

$$\|\bar{f}_1 - \tilde{f}_1\|^2 + \|\bar{f}_2 - \tilde{f}_2\|^2 = \|\bar{f}_1 - \tilde{f}_1 + \bar{f}_2 - \tilde{f}_2\|^2 = 0\,,$$

per cui $\bar{f}_1 = \tilde{f}_1$ e $\bar{f}_2 = \tilde{f}_2$. ∎

1.6 La proiezione ortogonale

Teorema 10 *Dato un sottospazio $\mathcal{M}$, e $f \in H$, esiste uno ed un solo $\bar{f} \in \mathcal{M}$ tale che $\|f - \bar{f}\| = d(f, \mathcal{M})$. Inoltre, $f - \bar{f} \in \mathcal{M}^\perp$.*

Dimostrazione. Sia (f_n) una successione in $\mathcal{M}$ tale che $\lim_n \|f - f_n\| = d(f, \mathcal{M})$. Applicando l'identità del parallelogramma a $(f - f_n)$ e $(f - f_m)$, si ha

$$\|f_n - f_m\|^2 \leq 2\|f_n - f\|^2 + 2\|f_m - f\|^2 - 4d(f, \mathcal{M})^2 .$$

Ne segue che $(f_n)_n$ è una successione di Cauchy, e quindi converge verso un certo $\bar{f} \in \mathcal{M}$. Chiaramente, si ha $\|f - \bar{f}\| = d(f, \mathcal{M})$. Inoltre, $\bar{f}$ è l'unico ad avere questa proprietà, perchè se $\tilde{f}$ è tale che $\|f - \tilde{f}\| = d(f, \mathcal{M})$, applicando l'identità del parallelogramma a $(f - \bar{f})$ e $(f - \tilde{f})$ si vede che

$$\|\bar{f} - \tilde{f}\|^2 = 4d(f, \mathcal{M})^2 - 4\left\|f - \frac{1}{2}(\bar{f} + \tilde{f})\right\|^2 \leq 0 ,$$

e perciò $\bar{f} = \tilde{f}$. Infine, se per assurdo ci fosse un $g \in \mathcal{M}$ tale che $\langle f - \bar{f}, g\rangle \neq 0$, allora, posto $g' = \bar{f} + \frac{\langle f - \bar{f}, g\rangle}{\|g\|^2} g \in \mathcal{M}$, con semplici passaggi si ottiene

$$\|f - g'\|^2 = \|f - \bar{f}\|^2 - \left(\frac{|\langle f - \bar{f}, g\rangle|}{\|g\|}\right)^2 < d(f, \mathcal{M})^2 ,$$

una contraddizione. ■

L'applicazione che a f associa $\bar{f}$ si dice **proiezione ortogonale** su $\mathcal{M}$, e si indica con $P_{\mathcal{M}}$:

$$\bar{f} = P_{\mathcal{M}} f .$$

Corollario 11 *Sia $\mathcal{M}$ una varietà lineare in H. Allora*

$$\overline{\mathcal{M}} = H \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^\perp = \{0\} .$$

Dimostrazione. Se $\overline{\mathcal{M}} = H$, per il Teorema 8 si ha $\mathcal{M}^\perp = \overline{\mathcal{M}}^\perp = H^\perp = \{0\}$. D'altra parte, se $\overline{\mathcal{M}} \neq H$, esiste un $f \in H$ che non appartiene al sottospazio $\overline{\mathcal{M}}$. Per il teorema precedente, $f - P_{\overline{\mathcal{M}}} f$ è non nullo e appartiene a $\overline{\mathcal{M}}^\perp = \mathcal{M}^\perp$. ■

Corollario 12 *Se $\mathcal{M}$ è un sottospazio di H, si ha che $H = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$: ogni elemento $f \in H$ si può scrivere in un unico modo come $f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in \mathcal{M}$ e $f_2 \in \mathcal{M}^\perp$.*

Dimostrazione. Per ogni $f \in H$, si scrive

$$f = P_{\mathcal{M}} f + (f - P_{\mathcal{M}} f) ,$$

per cui $H = \mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp$. Inoltre, essendo $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^\perp$ ortogonali, si ha $\mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$. ■

Corollario 13 *Per ogni varietà lineare* $\mathcal{M}$ *di* H*, si ha che* $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{M}}$.

Dimostrazione. Chiaramente, $\mathcal{M} \subseteq (\mathcal{M}^\perp)^\perp$, e siccome $(\mathcal{M}^\perp)^\perp$ è chiuso, $\overline{\mathcal{M}} \subseteq (\mathcal{M}^\perp)^\perp$. D'altra parte, se non valesse l'uguaglianza, si potrebbe trovare un $u_0 \in (\mathcal{M}^\perp)^\perp \setminus \{0\}$ tale che $u_0 \in \overline{\mathcal{M}}^\perp = \mathcal{M}^\perp$. Ciò è assurdo, in quanto, per il corollario precedente, $H = \mathcal{M}^\perp \oplus (\mathcal{M}^\perp)^\perp$. ■

1.7 Applicazioni lineari

Date due varietà lineari $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$, diremo che un'applicazione $A : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ è **lineare** se, presi $f, g \in \mathcal{M}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, si ha che $A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$. Scriveremo spesso Af al posto di $A(f)$.

Diremo che l'applicazione lineare $A : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ è **limitata** se esiste un numero reale $\gamma \geq 0$ tale che, per ogni $f \in \mathcal{M}$,

$$\|Af\| \leq \gamma \|f\| .$$

In tal caso, definiamo

$$\|A\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1} \|Af\| .$$

Si verificano le proprietà della norma:

$a)$ $\|A\| \geq 0$;
$b)$ $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
$c)$ $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$;
$d)$ $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Inoltre, se $A : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ e $B : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}''$, possiamo considerare l'applicazione composta $B \circ A : \mathcal{M} \to \mathcal{M}''$, che indicheremo semplicemente con BA. Se entrambe sono limitate, si ha

$$\|BA\| \leq \|B\| \, \|A\| .$$

infatti, si ha

$$\|BAf\| \leq \|B\| \, \|Af\| \leq \|B\| \, \|A\| \, \|f\| ,$$

per ogni $f \in \mathcal{M}$.

Teorema 14 *Un'applicazione lineare è limitata se e solo se è continua.*

Dimostrazione. Sia $A : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ limitata. Allora

$$\|Af - Ag\| = \|A(f-g)\| \leq \|A\| \, \|f-g\| \, ;$$

quindi A è lipschitziana e pertanto continua.

Viceversa, sia $A : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ non limitata. Allora per ogni numero naturale n esiste un $f_n \in \mathcal{M}$ tale che $\|Af_n\| > n\|f_n\|$. Posto $g_n = \frac{f_n}{n\|f_n\|}$, si ha che $\lim_n g_n = 0$ e

$$\|Ag_n\| = \left\| A\left(\frac{f_n}{n\|f_n\|}\right)\right\| = \frac{\|Af_n\|}{n\|f_n\|} > 1 \, ;$$

essendo $A(0) = 0$, l'applicazione A non può essere continua. ■

Dati due spazi di Hilbert H e H', indicheremo con $\mathcal{L}(H, H')$ l'insieme delle applicazioni lineari continue da H a H'. Possiamo renderlo uno spazio metrico introducendo la distanza

$$d(A, B) = \|A - B\| \, .$$

Teorema 15 *Con tale distanza, $\mathcal{L}(H, H')$ è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Sia $(A_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(H, H')$. Dalla

$$| \, \|A_n\| - \|A_m\| \, | \leq \|A_n - A_m\| \, ,$$

si ha che la successione delle norme $(\|A_n\|)_n$ è di Cauchy in $\mathbb{K}$ e pertanto converge. Dalla

$$\|A_n f - A_m f\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|f\| \, ,$$

si ha che, per ogni $f \in H$, la successione $(A_n f)_n$ è di Cauchy in H' e pertanto converge. Definiamo $A : H \to H'$ ponendo

$$Af = \lim_n A_n f \, .$$

Si vede facilmente che A è lineare; inoltre,

$$\|Af\| = \lim_n \|A_n f\| \leq (\lim_n \|A_n\|) \, \|f\| \, ,$$

per cui $A \in \mathcal{L}(H, H')$. Resta da verificare che

$$\lim_n A_n = A \, .$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo $(A_n)_n$ di Cauchy, esiste un $\bar{n}$ tale che, se $m \geq \bar{n}$ e $n \geq \bar{n}$, allora

$$\|A_n - A_m\| \leq \varepsilon \, ,$$

da cui

$$\|A_n f - A_m f\| \leq \varepsilon \|f\| \, ,$$

per ogni $f \in H$. Passando al limite per $m \to +\infty$ si ha che, se $n \geq \bar{n}$, allora

$$\|A_n f - Af\| \leq \varepsilon \|f\| \, ,$$

per ogni $f \in H$, e quindi

$$\|A_n - A\| \leq \varepsilon \, .$$

■

Se $H = H'$, scriveremo $\mathcal{L}(H)$ invece di $\mathcal{L}(H, H')$.

Teorema 16 *Se $\mathcal{M}$ è un sottospazio, si ha $P_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}(H)$. Se inoltre $\mathcal{M} \neq \{0\}$, si ha $\|P_{\mathcal{M}}\| = 1$.*

Dimostrazione. Presi $f, g \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, si può scrivere in un unico modo $f = f_1 + f_2$ e $g = g_1 + g_2$, con $f_1, g_1 \in \mathcal{M}$ e $f_2, g_2 \in \mathcal{M}^\perp$, dove $f_1 = P_{\mathcal{M}} f$ e $g_1 = P_{\mathcal{M}} g$. Quindi

$$\alpha f + \beta g = \alpha(f_1 + f_2) + \beta(g_1 + g_2) = (\alpha f_1 + \beta g_1) + (\alpha f_2 + \beta g_2)\,,$$

con $\alpha f_1 + \beta g_1 \in \mathcal{M}$ e $\alpha f_2 + \beta g_2 \in \mathcal{M}^\perp$. Per l'unicità della scomposizione, si deve avere

$$P_{\mathcal{M}}(\alpha f + \beta g) = \alpha f_1 + \beta g_1 = \alpha P_{\mathcal{M}} f + \beta P_{\mathcal{M}} g\,.$$

Questo dimostra la linearità di $P_{\mathcal{M}}$. Per il Teorema di Pitagora, abbiamo inoltre

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 \geq \|f_1\|^2 = \|P_{\mathcal{M}} f\|^2\,,$$

da cui la limitatezza di $P_{\mathcal{M}}$: per ogni $f \in H$, si ha $\|P_{\mathcal{M}} f\| \leq \|f\|$, per cui $\|P_{\mathcal{M}}\| \leq 1$. Infine, se $\mathcal{M} \neq \{0\}$, prendendo $f \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ si ha $\|P_{\mathcal{M}} f\| = \|f\|$. Ne segue che $\|P_{\mathcal{M}}\| = 1$. ■

Sia ora $g \in H$ fissato e $G : H \to \mathbb{K}$ definito da $G(f) = \langle f, g \rangle$. Si vede facilmente che $G \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$ e $\|G\| = \|g\|$. Vediamo che vale anche il viceversa.

Teorema 17 (di Riesz) *Data $G \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$, esiste un unico $g \in H$ tale che*

$$G(f) = \langle f, g \rangle\,,$$

per ogni $f \in H$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M} = \{f \in H : G(f) = 0\}$. Si verifica facilmente che $\mathcal{M}$ è un sottospazio di H. Se $\mathcal{M} = H$, basta prendere $g = 0$; altrimenti, scegliamo un $w \in \mathcal{M}^\perp$ con $\|w\| = 1$ e poniamo $g = G(w)^* w$. Allora $G(g) = |G(w)|^2 = \|g\|^2$ e per ogni $f \in H$ si ha che $f - \frac{G(f)}{G(g)} g \in \mathcal{M}$. Quindi,

$$\langle f, g \rangle = \left\langle \left(f - \frac{G(f)}{G(g)} g \right) + \frac{G(f)}{G(g)} g, g \right\rangle = \frac{G(f)}{G(g)} \|g\|^2 = G(f).$$

Verifichiamo ora che tale g è unico. Se ce ne fossero due, g_1 e g_2, per ogni $f \in H$ si avrebbe che $\langle f, g_1 \rangle = \langle f, g_2 \rangle$ e quindi $\langle f, g_1 - g_2 \rangle = 0$. Prendendo $f = g_1 - g_2$ si vede che deve essere $g_1 = g_2$. ■

2 Operatori in spazi di Hilbert

2.1 Definizioni e prime proprietà

Un'applicazione lineare $L : \mathcal{D}(L) \subseteq H \to H$, dove $\mathcal{D}(L)$ è una varietà lineare in H, si dirà un **operatore** in H. Definiamo il **nucleo** di L:

$$\mathcal{N}(L) = \{x \in \mathcal{D}(L) : Lx = 0\},$$

l'**immagine** di L:

$$\mathcal{I}(L) = \{Lx : x \in \mathcal{D}(L)\},$$

e il **grafico** di L:

$$\mathcal{G}(L) = \{(x, Lx) \in H \times H : x \in \mathcal{D}(L)\}.$$

Se H è uno spazio avente dimensione infinita, un operatore in H può non essere continuo (considereremo in $\mathcal{D}(L)$ la topologia indotta da H).

Teorema 18 *Se L è un operatore limitato in H, allora L può essere esteso a un operatore limitato su tutto lo spazio H. Questa estensione è unica se e solo se $\mathcal{D}(L)$ è denso in H.*

Dimostrazione. Estendiamo dapprima L a $\overline{\mathcal{D}(L)}$, la chiusura di $\mathcal{D}(L)$. Sia $x \in \overline{\mathcal{D}(L)}$, e sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathcal{D}(L)$ tale che $x_n \to x$. Allora, $(x_n)_n$ è una successione di Cauchy e, siccome L è limitato, anche $(Lx_n)_n$ è una successione di Cauchy. Allora, esiste un $f \in H$ tale che $Lx_n \to f$. Poniamo $Lx = f$. Si verifica facilmente che, in tal modo, L è stato esteso a un operatore continuo su $\overline{\mathcal{D}(L)}$.

A questo punto, possiamo ulteriormente estendere L a tutto lo spazio H, nel seguente modo: considerato che

$$H = \overline{\mathcal{D}(L)} \oplus \mathcal{D}(L)^{\perp},$$

possiamo scrivere ogni $x \in H$ come $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in \overline{\mathcal{D}(L)}$ e $x_2 \in \mathcal{D}(L)^{\perp}$. Prendendo una qualsiasi applicazione lineare $A : \mathcal{D}(L)^{\perp} \to H$, possiamo porre $Lx = Lx_1 + Ax_2$, ottenendo in tal modo un'applicazione lineare limitata definita su tutto lo spazio H. Chiaramente, se $\mathcal{D}(L)$ è denso in H, l'uso di A è inutile, e l'estensione di L sarà in tal caso unica. ∎

Quindi, ogni operatore continuo può essere sempre pensato come restrizione di un operatore di $\mathcal{L}(H)$.

Avendo a che fare con operatori possibilmente non continui, è utile introdurre un sostituto della continuità. Introducendo in $H \times H$ il prodotto scalare

$$\langle (f, g), (f', g') \rangle = \langle f, f' \rangle + \langle g, g' \rangle,$$

si verifica facilmente che $H \times H$ diventa uno spazio di Hilbert, e la topologia indotta è la topologia prodotto. Un operatore L in H si dice **chiuso** se $\mathcal{G}(L)$ è chiuso in $H \times H$. In altre parole, L è chiuso se per ogni successione $(x_n)_n$ in $\mathcal{D}(L)$ tale che $x_n \to x$ e $Lx_n \to f$, si ha che $x \in \mathcal{D}(L)$ e $f = Lx$. [1] Ne segue che, se L è chiuso, allora $\mathcal{N}(L)$ è chiuso.

Teorema 19 *Un operatore continuo L in H risulta chiuso se e solo se $\mathcal{D}(L)$ è chiuso.*

Dimostrazione. Supponiamo che L sia chiuso. Sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathcal{D}(L)$ tale che $x_n \to x$. Siccome L è continuo, la successione $(Lx_n)_n$ è di Cauchy, e perciò converge verso un certo $f \in H$. Essendo L chiuso, ne segue che $x \in \mathcal{D}(L)$, e ciò dimostra che $\mathcal{D}(L)$ è chiuso.

Viceversa, se $\mathcal{D}(L)$ è chiuso, presa una successione $(x_n)_n$ tale che $x_n \to x$ e $Lx_n \to f$, si ha che $x \in \mathcal{D}(L)$, e, per la continuità di L, $Lx = f$. Ciò dimostra che L è chiuso. ∎

2.2 L'operatore aggiunto

Sia L un operatore in H con dominio $\mathcal{D}(L)$ denso in H. Vogliamo definire il suo **operatore aggiunto** L^*. Il suo dominio $\mathcal{D}(L^*)$ è costituito da quegli $y \in H$ per i quali il funzionale $G_y : \mathcal{D}(L) \to \mathbb{K}$, definito da

$$G_y(x) = \langle Lx, y \rangle \,,$$

è continuo. Se $y \in \mathcal{D}(L^*)$, siccome $\mathcal{D}(L)$ è denso in H, il funzionale G_y può essere esteso in un unico modo a un funzionale continuo definito su tutto H. Abbiamo così che $G_y \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$. Per il Teorema di Riesz, c'è un unico $g_y \in H$ tale che $G_y(f) = \langle f, g_y \rangle$, per ogni $f \in H$. Definiamo quindi $L^*y = g_y$. Pertanto,

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle \,,$$

per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$ e $y \in \mathcal{D}(L^*)$. La seguente proposizione sarà utile nella pratica.

Proposizione 20 *Se $y \in H$ e $w \in H$ sono tali che*

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, w \rangle \,,$$

per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$, allora $y \in \mathcal{D}(L^*)$ e $L^*y = w$.

Dimostrazione. Siccome $G_y(x) = \langle Lx, y \rangle = \langle x, w \rangle$, abbiamo che G_y è continuo su $\mathcal{D}(L)$, quindi $y \in \mathcal{D}(L^*)$. Inoltre, $G_y(x) = \langle x, L^*y \rangle$, cioè $\langle x, w \rangle = \langle x, L^*y \rangle$, per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$. Essendo $\mathcal{D}(L)$ denso in H, l'uguaglianza $\langle x, w \rangle = \langle x, L^*y \rangle$ vale per ogni $x \in H$, per cui deve essere $w = L^*y$. ∎

[1] È noto dall'Analisi Funzionale che, se $\mathcal{D}(L) = H$, allora L è continuo se e solo se il suo grafico è chiuso.

Verifichiamo ora che la funzione L^* così definita è un operatore.

Teorema 21 *L'insieme $\mathcal{D}(L^*)$ è una varietà lineare e $L^* : \mathcal{D}(L^*) \subseteq H \to H$ è un operatore in H.*

<u>Dimostrazione</u>. Siano y_1, y_2 due elementi di $\mathcal{D}(L^*)$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Allora,

$$\begin{aligned}\langle Lx, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle &= \alpha^* \langle Lx, y_1 \rangle + \beta^* \langle Lx, y_2 \rangle \\ &= \alpha^* \langle x, L^* y_1 \rangle + \beta^* \langle x, L^* y_2 \rangle \\ &= \langle x, \alpha L^* y_1 + \beta L^* y_2 \rangle \,,\end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$. Dalla Proposizione 20 segue che $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{D}(L^*)$ e $L^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L^* y_1 + \beta L^* y_2$, per cui la dimostrazione è completata. ■

Per poter considerare l'operatore L^*, da ora in poi considereremo soltanto operatori L definiti in un sottospazio denso in H. Scriveremo in tal caso che L è **d.d.** in H.

Teorema 22 *Se $A \in \mathcal{L}(H)$, allora $A^* \in \mathcal{L}(H)$.*

<u>Dimostrazione</u>. Si ha

$$\|A^* y\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, A^* y \rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, y \rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \, \|y\| = \|A\| \, \|y\| \,,$$

da cui si vede che A^* è limitato, con $\|A^*\| \leq \|A\|$. ■

Teorema 23 *Se $A, B \in \mathcal{L}(H)$, allora $(AB)^* = B^* A^*$.*

<u>Dimostrazione</u>. Si ha

$$\langle ABf, g \rangle = \langle Bf, A^* g \rangle = \langle f, B^* A^* g \rangle,$$

per ogni $f, g \in H$. ■

Teorema 24 *Sia $(A_n)_n$ una successione in $\mathcal{L}(H)$, tale che $\lim_n A_n = A \in \mathcal{L}(H)$. Allora*

$$A^* = \lim_n A_n^* \,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Valendo l'uguaglianza

$$\langle A_n f, g \rangle = \langle f, A_n^* g \rangle \,,$$

per ogni $f, g \in H$, la tesi segue con un semplice passaggio al limite. ■

Teorema 25 *Se L è un operatore d.d. in H e $A \in \mathcal{L}(H)$, allora $(L+A)^* = L^* + A^*$.*

Dimostrazione. Innanzitutto si noti che $\mathcal{D}(L+A) = \mathcal{D}(L)$ e, per il Teorema 22, $\mathcal{D}(L^* + A^*) = \mathcal{D}(L^*)$. Per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$, $y \in \mathcal{D}(L^*)$, si ha

$$\langle (L+A)x, y\rangle = \langle Lx, y\rangle + \langle Ax, y\rangle = \langle x, L^*y\rangle + \langle x, A^*y\rangle = \langle x, (L^*+A^*)y\rangle.$$

Pertanto, $y \in \mathcal{D}((L+A)^*)$ e $(L+A)^*y = L^*y + A^*y$. Quindi, $\mathcal{D}(L^*) \subseteq \mathcal{D}((L+A)^*)$. D'altra parte, se $w \in \mathcal{D}((L+A)^*)$, posto $z = (L+A)^*w$, per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$ abbiamo

$$\langle (L+A)x, w\rangle = \langle x, z\rangle,$$

e perciò

$$\langle Lx, w\rangle = \langle x, z\rangle - \langle Ax, w\rangle.$$

Essendo questa continua in x, si ha che $w \in \mathcal{D}(L^*)$, e possiamo concludere che $\mathcal{D}((L+A)^*) = \mathcal{D}(L^*) = \mathcal{D}(L^* + A^*)$. Ne segue la tesi. ■

Teorema 26 *Se L è un operatore d.d. in H, allora L^* è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $(y_n)_n$ una successione in $\mathcal{D}(L^*)$ tale che $y_n \to y$ e $L^*y_n \to w$. Allora, per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$ si ha che

$$\langle Lx, y\rangle = \lim_n \langle Lx, y_n\rangle = \lim_n \langle x, L^*y_n\rangle = \langle x, w\rangle.$$

Ne segue che $y \in \mathcal{D}(L^*)$ e $L^*y = w$. ■

Teorema 27 *Se L è un operatore chiuso d.d. in H, allora L^* è d.d. in H e $L^{**} = L$.*

Dimostrazione. Sia $w \in H$ tale che

$$\langle w, y\rangle = 0 \text{ per ogni } y \in \mathcal{D}(L^*).$$

Se $w \neq 0$, abbiamo che $(0, w) \notin \mathcal{G}(L)$. Quindi, posto $(f, g) = (0, w) - P_{\mathcal{G}(L)}(0, w)$, abbiamo che $(f, g) \in \mathcal{G}(L)^\perp$, ossia

$$\langle f, x\rangle + \langle g, Lx\rangle = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{D}(L),$$

per cui $g \in \mathcal{D}(L^*)$ e

$$\langle g, w\rangle = \langle (f, g), (0, w)\rangle = \|(f, g)\|^2 \neq 0,$$

una contraddizione. Quindi deve essere $w = 0$, e ciò prova che $\mathcal{D}(L^*)$ è denso in H, per il Corollario 11. Dimostriamo che $L = L^{**}$. Si ha:

$$\begin{aligned}(y, w) \in \mathcal{G}(L^*) &\Leftrightarrow \langle Lx, y\rangle = \langle x, w\rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{D}(L)\\ &\Leftrightarrow -\langle x, w\rangle + \langle Lx, y\rangle = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{D}(L)\\ &\Leftrightarrow (-w, y) \in \mathcal{G}(L)^\perp,\end{aligned}$$

e perciò:

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathcal{G}(L^{**}) &\Leftrightarrow (-y, x) \in \mathcal{G}(L^*)^\perp\\ &\Leftrightarrow \langle(-y, x), (f, g)\rangle = 0 \quad \text{per ogni } (f, g) \in \mathcal{G}(L^*)\\ &\Leftrightarrow \langle(-y, x), (g', -f')\rangle = 0 \quad \text{per ogni } (f', g') \in \mathcal{G}(L)^\perp\\ &\Leftrightarrow \langle(x, y), (f', g')\rangle = 0 \quad \text{per ogni } (f', g') \in \mathcal{G}(L)^\perp\\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (\mathcal{G}(L)^\perp)^\perp.\end{aligned}$$

Siccome $\mathcal{G}(L)$ è chiuso, per il Corollario 13 si ha $\mathcal{G}(L^{**}) = (\mathcal{G}(L)^\perp)^\perp = \mathcal{G}(L)$. ∎

Teorema 28 *Se L è un operatore chiuso d.d. in H, allora*

$$\mathcal{N}(L) = \mathcal{I}(L^*)^\perp.$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$, si ha:

$$\begin{aligned}Lx = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \langle Lx, y\rangle = 0 \quad \text{per ogni } y \in \mathcal{D}(L^*)\\ &\Leftrightarrow \quad \langle x, L^*y\rangle = 0 \quad \text{per ogni } y \in \mathcal{D}(L^*)\\ &\Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{I}(L^*)^\perp.\end{aligned}$$

∎

Se L è iniettivo su $\mathcal{D}(L)$, possiamo definire L^{-1}, l'**operatore inverso** di L, tale che $\mathcal{D}(L^{-1}) = \mathcal{I}(L)$ e

$$L^{-1}(Lx) = x$$

per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$. È chiaro dalla definizione che se L è chiuso, lo è anche L^{-1}.

Teorema 29 *Sia L un operatore d.d. in H, iniettivo e tale che $\mathcal{I}(L)$ sia denso in H. Allora L^* è iniettivo, e $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$.*

Dimostrazione. Per ogni $y \in \mathcal{D}(L^*)$ e $w \in \mathcal{D}(L^{-1}) = I(L)$,

$$\langle L^{-1}w, L^*y\rangle = \langle LL^{-1}w, y\rangle = \langle w, y\rangle,$$

per cui $L^*y \in \mathcal{D}((L^{-1})^*)$ e $(L^{-1})^*L^*y = y$. Ne segue che $I(L^*) \subseteq \mathcal{D}((L^{-1})^*)$. D'altra parte, per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$ e $z \in \mathcal{D}((L^{-1})^*)$,

$$\langle Lx, (L^{-1})^*z\rangle = \langle L^{-1}Lx, z\rangle = \langle x, z\rangle,$$

per cui $(L^{-1})^*z \in \mathcal{D}(L^*)$ e $L^*(L^{-1})^*z = z$. Quindi, $z \in I(L^*)$, il che dimostra che $\mathcal{D}((L^{-1})^*) \subseteq I(L^*)$. Possiamo concludere che $\mathcal{D}((L^{-1})^*) = \mathcal{I}(L^*)$, e si ha la tesi. ∎

2.3 Insieme risolvente e spettro

Nella teoria che segue sarà conveniente supporre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ossia considerare il caso di uno spazio di Hilbert complesso. Il caso di uno spazio di Hilbert reale verrà trattato in una sezione successiva.

Chiameremo **autovalore** di un operatore L ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $L - \lambda I$ non sia iniettivo, dove con I abbiamo indicato l'operatore identità su H. In altre parole, λ è un autovalore se esiste un $x \in \mathcal{D}(L) \setminus \{0\}$ tale che

$$Lx = \lambda x.$$

L'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $L - \lambda I$ abbia un inverso $(L - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ è detto **insieme risolvente** di L ed è indicato con $\rho(L)$. Il suo complementare è detto lo **spettro** di L ed è indicato con $\sigma(L)$. Se $\lambda \in \rho(L)$, l'operatore $(L - \lambda I)^{-1}$ verrà detto il **risolvente** di L in λ.

Se $\rho(L) \neq \emptyset$, allora L è necessariamente un operatore chiuso. Infatti, $(L - \lambda I)^{-1}$ è continuo, quindi chiuso, e tale è pertanto pure $L - \lambda I$, e quindi anche L.

Teorema 30 *Se L è un operatore d.d. e chiuso in H, allora*

$$\lambda \in \sigma(L) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^* \in \sigma(L^*).$$

<u>Dimostrazione</u>. È una immediata conseguenza dei Teoremi 22, 25 e 29. ∎

Teorema 31 *Sia L un operatore in H, tale che $0 \in \rho(L)$. Allora*

$$\lambda \in \sigma(L) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{-1} \in \sigma(L^{-1}).$$

<u>Dimostrazione</u>. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si ha

$$L - \lambda I = -\lambda[L^{-1} - \lambda^{-1} I]L.$$

Ne segue la tesi. ∎

È chiaro che ogni eventuale autovalore è un elemento dello spettro. Se H ha dimensione finita, si può vedere che ogni elemento dello spettro è un autovalore. Ciò non è vero in generale se H ha dimensione infinita.

Dato $A \in \mathcal{L}(H)$, definiamo per induzione l'operatore A^n: si pone $A^0 = I$ e, supposto definito A^{n-1}, si pone $A^n = A^{n-1}A$.

Teorema 32 *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è tale che*

$$\|I - A\| < 1\,,$$

allora $0 \in \rho(A)$, ossia A è invertibile con $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Inoltre, si ha

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$$

(la **serie di Neumann***).*

Dimostrazione. Poniamo $B = I - A$, per cui $\|B\| < 1$. Dalla

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} B^k \right\| \le \sum_{k=m}^{n} \|B^k\| \le \sum_{k=m}^{n} \|B\|^k \le \sum_{k=m}^{\infty} \|B\|^k = \frac{\|B\|^m}{1 - \|B\|}$$

si vede che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ è di Cauchy e pertanto converge in $\mathcal{L}(H)$, essendo questo uno spazio metrico completo. Dimostriamo che

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
(I - B)\left(\sum_{k=0}^{\infty} B^k\right) &= (I - B)\left(\lim_n \sum_{k=0}^{n} B^k\right) \\
&= \lim_n \left[(I - B)\left(\sum_{k=0}^{n} B^k\right)\right] \\
&= \lim_n (I - B^{n+1}) = I\,,
\end{aligned}$$

e allo stesso modo

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} B^k\right)(I - B) &= \left(\lim_n \sum_{k=0}^{n} B^k\right)(I - B) \\
&= \lim_n \left[\left(\sum_{k=0}^{n} B^k\right)(I - B)\right] \\
&= \lim_n (I - B^{n+1}) = I\,,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Corollario 33 *Sia L un operatore in H tale che $0 \in \rho(L)$. Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è tale che*

$$\|A\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|},$$

allora $0 \in \rho(L + A)$.

Dimostrazione. Si ha che $(L + A)L^{-1} = I + AL^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Inoltre,

$$\|I - (L + A)L^{-1}\| = \|AL^{-1}\| \le \|A\|\,\|L^{-1}\| < 1.$$

Quindi, per il Teorema 32, abbiamo che $1 \in \rho(I - (L + A)L^{-1})$. In altre parole, $(L + A)L^{-1}$ ha un inverso in $\mathcal{L}(H)$. Ne segue che anche $(L + A)$ ha un inverso $(L + A)^{-1} = L^{-1}[(L + A)L^{-1}]^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. ■

Corollario 34 *Lo spettro di un operatore in H è chiuso.*

Dimostrazione. Consideriamo un operatore L in H. Se $\rho(L) = \emptyset$, la tesi è banale. Altrimenti, fissiamo $\lambda \in \rho(L)$, e consideriamo un $\mu \in \mathbb{C}$ tale che $|\mu-\lambda| < 1/\|(L-\lambda I)^{-1}\|$. Allora, per il Corollario 33, $L+\mu I = L+\lambda I+(\mu-\lambda)I$ è tale che $0 \in \rho(L+\mu I)$, ossia $\mu \in \rho(L)$. Perciò $\rho(L)$ è un insieme aperto, e quindi $\sigma(L)$ è chiuso. ∎

Corollario 35 *Se $A \in \mathcal{L}(H)$, si ha:*

$$\lambda \in \sigma(A) \quad \Rightarrow \quad |\lambda| \leq \|A\| \,.$$

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| > \|A\|$. Essendo

$$\left\| I - \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right) \right\| = \left\| \frac{1}{\lambda} A \right\| = \frac{1}{|\lambda|} \|A\| < 1 \,,$$

si ha che $0 \in \rho(I - \frac{1}{\lambda}A)$; ne segue che $\lambda \in \rho(A)$. ∎

2.4 Operatori autoaggiunti

Un operatore L si dice **autoaggiunto** se coincide con il suo aggiunto. Ciò significa che L è d.d. in H, $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L^*)$ e, per ogni $x, y \in \mathcal{D}(L)$, si ha

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, Ly \rangle.$$

In particolare, per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$, $\langle Lx, x \rangle$ è un numero reale. Se L è autoaggiunto, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $L + \lambda I$ è anch'esso autoaggiunto. Segue inoltre dal Teorema 26 che ogni operatore autoaggiunto è chiuso.

Un operatore autoaggiunto non può avere autovalori complessi non reali. Infatti, sia L autoaggiunto, λ un suo autovalore e $u \in H \setminus \{0\}$ tale che $Lu = \lambda u$. Allora $\langle Lu, u \rangle = \lambda \|u\|^2$, e siccome $\langle Lu, u \rangle \in \mathbb{R}$, anche $\lambda \in \mathbb{R}$. Più in generale, si ha:

Teorema 36 *Lo spettro di un operatore autoaggiunto è reale.*

Dimostrazione. Sia L un operatore autoaggiunto in H e sia $\lambda = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Allora λ non può essere un autovalore di L. Quindi, possiamo considerare l'inverso $(L - \lambda I)^{-1}$, che è un operatore definito su $\mathcal{I}(L - \lambda I)$. Siccome $(L - \lambda I)$ è chiuso, anche $(L - \lambda I)^{-1}$ lo è. Dimostriamo che è anche continuo. Per ogni $v \in \mathcal{D}((L - \lambda I)^{-1}) = \mathcal{I}(L - \lambda I)$, sia $u = (L - \lambda I)^{-1} v$. Allora:

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \|(L - \lambda I)u\|^2 \\
&= \langle (L - aI)u - ibu, (L - aI)u - ibu \rangle \\
&= \|(L - aI)u\|^2 + |b|^2 \|u\|^2 \\
&\geq |b|^2 \|u\|^2 = |b|^2 \|(L - \lambda I)^{-1} v\|^2
\end{aligned}$$

Perciò, $(L-\lambda I)^{-1}$ è chiuso e continuo e, per il Teorema 19, il suo dominio deve essere chiuso. D'altra parte, $\lambda^* = a - ib$ non può essere un autovalore di L, ossia $\mathcal{N}(L-\lambda^* I) = \{0\}$. Per il Teorema 28, essendo $\mathcal{I}(L-\lambda I)$ chiuso,

$$H = \mathcal{N}(L-\lambda^* I)^\perp = [\mathcal{I}(L-\lambda I)^\perp]^\perp = \mathcal{I}(L-\lambda I).$$

Quindi, $(L-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, ossia $\lambda \in \rho(L)$. ■

Teorema 37 *Se L è un operatore autoaggiunto con $D(L) = H$ ed esiste un $\gamma \geq 0$ per cui*

$$|\langle Lf, f\rangle| \leq \gamma \|f\|^2,$$

per ogni $f \in H$, allora $L \in \mathcal{L}(H)$ e

$$\|L\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Lf, f\rangle|.$$

Dimostrazione. Sia $w \in H$ tale che $\|w\| = 1$. Se $Lw \neq 0$, poniamo $v = \frac{Lw}{\|Lw\|}$. Allora

$$\begin{aligned}
\|Lw\| &= \frac{1}{4}[\langle L(w+v), (w+v)\rangle - \langle L(w-v), (w-v)\rangle] \\
&\leq \sup_{\|f\|=1} |\langle Lf, f\rangle| \, \frac{1}{4}[\, \|w+v\|^2 + \|w-v\|^2] \\
&= \sup_{\|f\|=1} |\langle Lf, f\rangle| \, \frac{1}{4}[\, 2\|w\|^2 + 2\|v\|^2] \\
&= \sup_{\|f\|=1} |\langle Lf, f\rangle|.
\end{aligned}$$

Quindi, L è limitato e

$$\|L\| \leq \sup_{\|f\|=1} |\langle Lf, f\rangle|,$$

Inoltre, siccome

$$|\langle Lf, f\rangle| \leq \|Lf\| \, \|f\| \leq \|L\| \, \|f\|^2,$$

si ha che

$$\sup_{\|f\|=1} |\langle Lf, f\rangle| \leq \|L\|.$$

e ciò completa la dimostrazione. ■

Un operatore autoaggiunto $A \in \mathcal{L}(H)$ si dice **monotono** se, per ogni $f \in H$, si ha

$$\langle Af, f\rangle \geq 0.$$

In tal caso, scriveremo $A \geq 0$. Dati due tali operatori A_1 e A_2, in $\mathcal{L}(H)$ scriveremo $A_1 \leq A_2$ se $(A_2 - A_1) \geq 0$. Osserviamo che $\leq$ è una relazione d'ordine: è chiaramente riflessiva e transitiva; inoltre, se $A_1 \leq A_2$ e $A_2 \leq A_1$, allora $\langle (A_2 - A_1)f, f\rangle = 0$ per ogni $f \in H$, e per il teorema precedente $\|A_2 - A_1\| = 0$, ossia $A_1 = A_2$.

Lemma 38 *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto e monotono, allora, per ogni $f, g \in H$,*

$$|\langle Af, g\rangle| \leq \langle Af, f\rangle^{1/2}\langle Ag, g\rangle^{1/2}.$$

Inoltre, per ogni $f \in H$,

$$\|Af\|^2 \leq \|A\|\langle Af, f\rangle.$$

Dimostrazione. Per ogni numero reale γ, sia $w_\gamma = f + \gamma\langle Af, g\rangle g$. Allora

$$0 \leq \langle Aw_\gamma, w_\gamma\rangle = \langle Af, f\rangle + 2\gamma|\langle Af, g\rangle|^2 + \gamma^2\langle Ag, g\rangle|\langle Af, g\rangle|^2.$$

Perciò, deve essere $|\langle Af, g\rangle|^2 - \langle Af, f\rangle\langle Ag, g\rangle \leq 0$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} \|Af\|^4 &= |\langle A(Af), f\rangle|^2 \\ &\leq \langle Af, f\rangle\langle A(Af), Af\rangle \\ &\leq \langle Af, f\rangle\|A(Af)\|\,\|Af\| \\ &\leq \langle Af, f\rangle\|A\|\,\|Af\|^2, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Teorema 39 *Sia $A \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunto. Poniamo*

$$m = \inf_{\|f\|=1}\langle Af, f\rangle,$$

$$M = \sup_{\|f\|=1}\langle Af, f\rangle.$$

Allora $\sigma(A) \subseteq [m, M]$, $m \in \sigma(A)$ e $M \in \sigma(A)$.

Dimostrazione. Per quanto riguarda la prima affermazione, è sufficiente considerare l'operatore $A - \frac{1}{2}(m+M)I$, e applicare ad esso il Corollario 35 e il Teorema 37. Dimostriamo ora che $m \in \sigma(A)$. Si ha $A - mI \geq 0$. Inoltre, esiste una successione $(f_n)_n$ tale che $\|f_n\| = 1$ e $\langle(A - mI)f_n, f_n\rangle \leq 1/n$. Se per assurdo $m \in \rho(A)$, usando il Lemma 38 abbiamo:

$$\begin{aligned} 1 = \|f_n\|^2 &= \|(A - mI)^{-1}(A - mI)f_n\|^2 \\ &\leq \|(A - mI)^{-1}\|^2\|(A - mI)f_n\|^2 \\ &\leq \|(A - mI)^{-1}\|^2\|(A - mI)\|\,\langle(A - mI)f_n, f_n\rangle. \end{aligned}$$

Se n è sufficientemente grande, ottengo una contraddizione. Quindi, $m \in \sigma(A)$, e analogamente si dimostra che $M \in \sigma(A)$. ■

Corollario 40 *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto, allora*

$$A \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \sigma(A) \subseteq [0, +\infty[\,.$$

Dimostrazione. È una immediata conseguenza del Teorema 39. ■

Corollario 41 *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto, allora*

$$\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Dimostrazione. È una immediata conseguenza dei Teoremi 37 e 39. ■

Teorema 42 *Sia L un operatore autoaggiunto in H e $\lambda \in \rho(L) \cap \mathbb{R}$. Allora*

$$\|(L - \lambda I)^{-1}\| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(L))}.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 31,

$$\mu \in \sigma(L) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu - \lambda} \in \sigma((L - \lambda I)^{-1}) \setminus \{0\}.$$

Per il Teorema 29, $(L - \lambda I)^{-1}$ è autoaggiunto. Allora, per il Corollario 41,

$$\|(L - \lambda I)^{-1}\| = \max\left\{\frac{1}{|\mu - \lambda|} : \mu \in \sigma(L)\right\} = [\min\{|\mu - \lambda| : \mu \in \sigma(L)\}]^{-1}.$$

■

Dato $A \in \mathcal{L}(H)$, scriveremo brevemente $A^2 = AA$. Diremo che A è "idempotente" se $A^2 = A$.

Teorema 43 *Un operatore $P \in \mathcal{L}(H)$ è una proiezione ortogonale se e solo se P è autoaggiunto e idempotente.*

Dimostrazione. Se $P = P_{\mathcal{M}}$, per un certo sottospazio $\mathcal{M}$, allora per ogni $f \in H$ si ha che $P_{\mathcal{M}} f \in \mathcal{M}$ e quindi $P_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}} f) = P_{\mathcal{M}} f$, ossia $P_{\mathcal{M}}^2 = P_{\mathcal{M}}$. Inoltre, presi $f, g \in H$, si ha

$$\langle P_{\mathcal{M}} f, g \rangle = \langle P_{\mathcal{M}} f, P_{\mathcal{M}} g + (g - P_{\mathcal{M}} g) \rangle = \langle P_{\mathcal{M}} f, P_{\mathcal{M}} g \rangle$$

e

$$\langle f, P_{\mathcal{M}} g \rangle = \langle P_{\mathcal{M}} f + (f - P_{\mathcal{M}} f), P_{\mathcal{M}} g \rangle = \langle P_{\mathcal{M}} f, P_{\mathcal{M}} g \rangle\,,$$

per cui $P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}^*$.

Viceversa, sia P tale che $P^2 = P = P^*$. Consideriamo $\mathcal{M} = \{f : Pf = f\}$: si verifica che è un sottospazio. Preso $f \in H$, si ha che $P(Pf) = Pf$, per cui $Pf \in \mathcal{M}$. Inoltre, per ogni $g \in \mathcal{M}$, si ha $g = Pg$, per cui

$$\langle f - Pf, g \rangle = \langle f, g \rangle - \langle Pf, g \rangle = \langle f, g \rangle - \langle f, Pg \rangle = 0\,;$$

quindi $f - Pf \in \mathcal{M}^\perp$. Essendo $f = Pf + (f - Pf)$, con $Pf \in \mathcal{M}$ e $f - Pf \in \mathcal{M}^\perp$, deve essere $Pf = P_{\mathcal{M}} f$. ■

Teorema 44 *Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ sono due sottospazi tali che $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, allora $P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M}$ è la proiezione ortogonale sul sottospazio $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^\perp$.*

<u>Dimostrazione</u>. Essendo $P_\mathcal{N}^* = P_\mathcal{N}$ e $P_\mathcal{M}^* = P_\mathcal{M}$, si ha che

$$(P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M})^* = P_\mathcal{N}^* - P_\mathcal{M}^* = P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M}\,.$$

Inoltre,

$$(P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M})^2 = P_\mathcal{N}^2 - P_\mathcal{N}P_\mathcal{M} - P_\mathcal{M}P_\mathcal{N} + P_\mathcal{M}^2\,.$$

Ma $P_\mathcal{N}^2 = P_\mathcal{N}$ e $P_\mathcal{M}^2 = P_\mathcal{M}$; inoltre, siccome $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, si ha che $P_\mathcal{N}P_\mathcal{M} = P_\mathcal{M}$. Infine,

$$P_\mathcal{M}P_\mathcal{N} = P_\mathcal{M}^*P_\mathcal{N}^* = (P_\mathcal{N}P_\mathcal{M})^* = P_\mathcal{M}^* = P_\mathcal{M}\,.$$

In conclusione, si ha

$$(P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M})^2 = P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M} - P_\mathcal{M} + P_\mathcal{M} = P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M}\,.$$

Essendo autoaggiunto e idempotente, $P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M}$ è una proiezione ortogonale, su un certo sottospazio $\mathcal{M}'$. Dimostriamo ora che $\mathcal{M}' = \mathcal{N} \cap \mathcal{M}^\perp$.

Essendo $I - P_\mathcal{M}$ la proiezione ortogonale su $\mathcal{M}^\perp$, vediamo che, se $f \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}^\perp$, allora

$$(P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M})f = P_\mathcal{N}(I - P_\mathcal{M})f = P_\mathcal{N}f = f\,,$$

per cui $f \in \mathcal{M}'$. Quindi $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^\perp \subseteq \mathcal{M}'$.

Viceversa, se $f \in \mathcal{M}'$, allora $f \in \mathcal{N}$ e, preso un qualunque $g \in \mathcal{M}$,

$$\langle f, g\rangle = \langle (P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M})f, g\rangle = \langle f, (P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M}), g\rangle = \langle f, g - g\rangle = 0\,,$$

per cui $f \in \mathcal{M}^\perp$. Quindi, $f \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}^\perp$, e abbiamo dimostrato l'uguaglianza. ∎

Notiamo che una proiezione ortogonale P è sempre monotona. Infatti,

$$\langle Pf, f\rangle = \langle Pf, (f - Pf) + Pf\rangle = \langle Pf, Pf\rangle \geq 0\,,$$

per ogni $f \in H$. Nella situazione del teorema precedente, se $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, avremo quindi che $P_\mathcal{M} \leq P_\mathcal{N}$.

3 Funzioni di operatori

3.1 Polinomi

Definiamo innanzitutto le potenze di un operatore $A \in \mathcal{L}(H)$: si pone $A^0 = I$ e, per induzione, $A^{n+1} = A^nA$.

Denotiamo con $\mathcal{P}$ l'algebra dei polinomi a coefficienti complessi. Ricordiamo che anche $\mathcal{L}(H)$ è un'algebra, e fissiamo un $A \in \mathcal{L}(H)$. Per ogni polinomio $p \in \mathcal{P}$,

$$p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \,,$$

con $\alpha_n \neq 0$, definiamo il seguente operatore $p(A) \in \mathcal{L}(H)$:

$$p(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I \,.$$

Risulta di facile verifica il seguente

Teorema 45 *La funzione che ad ogni $p \in \mathcal{P}$ associa $p(A) \in \mathcal{L}(H)$ è un omomorfismo tra algebre: se $p, q \in \mathcal{P}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, si ha*

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A) \,, \quad (\alpha p)(A) = \alpha p(A) \,, \quad (pq)(A) = p(A)q(A) \,.$$

Inoltre,

$$p(A)^* = p^*(A^*) \,,$$

dove p^* è il polinomio

$$p^*(x) = \alpha_n^* x^n + \alpha_{n-1}^* x^{n-1} + \ldots + \alpha_1^* x + \alpha_0^* \,.$$

Quindi, se A è autoaggiunto e il polinomio p ha coefficienti reali, allora anche $p(A)$ è autoaggiunto.

Osserviamo che, dati due polinomi p e q, i rispettivi operatori $p(A)$ e $q(A)$ commutano:

$$p(A)q(A) = q(A)p(A) \,.$$

Vediamo ora come un polinomio trasforma lo spettro dell'operatore.

Teorema 46 *Si ha*

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) \,,$$

per cui

$$\lambda \in \sigma(A) \;\Leftrightarrow\; p(\lambda) \in \sigma(p(A)) \,.$$

Dimostrazione. Se p è costante, l'affermazione è di immediata verifica. Supponiamo quindi $n \geq 1$ e dimostriamo le due inclusioni che definiscono l'uguaglianza.

Sia $\lambda \in \sigma(A)$, per cui $p(\lambda) \in p(\sigma(A))$; vogliamo vedere che $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$. Per assurdo, supponiamo che sia $p(\lambda) \in \rho(p(A))$, per cui esiste $(p(A) - p(\lambda)I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Scriviamo

$$p(x) - p(\lambda) = (x - \lambda)\psi(x)\,,$$

dove $\psi \in \mathcal{P}$ è un polinomio. Allora, per le proprietà di omomorfismo,

$$p(A) - p(\lambda)I = (A - \lambda I)\psi(A)\,,$$

per cui

$$I = (A - \lambda I)\psi(A)(p(A) - p(\lambda)I)^{-1}\,,$$

e anche

$$I = (p(A) - p(\lambda)I)^{-1}(A - \lambda I)\psi(A)\,.$$

Essendo, per la commutatività,

$$(p(A) - p(\lambda)I)\psi(A) = \psi(A)(p(A) - p(\lambda)I)\,,$$

se ne deduce che

$$\psi(A)(p(A) - p(\lambda)I)^{-1} = (p(A) - p(\lambda)I)^{-1}\psi(A)\,.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} I &= (p(A) - p(\lambda)I)^{-1}(A - \lambda I)\psi(A) \\ &= (p(A) - p(\lambda)I)^{-1}\psi(A)(A - \lambda I) \\ &= \psi(A)(p(A) - p(\lambda)I)^{-1}(A - \lambda I)\,. \end{aligned}$$

Pertanto, $A - \lambda I$ è invertibile, con inversa

$$(A - \lambda I)^{-1} = \psi(A)(p(A) - p(\lambda)I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\,,$$

il che contraddice l'ipotesi che $\lambda \in \sigma(A)$.

Prendiamo ora un $\eta \in \sigma(p(A))$. Vogliamo dimostrare che esiste un $\xi \in \sigma(A)$ per cui $p(\xi) = \eta$. Scriviamo

$$p(x) - \eta = \alpha_n(x - \xi_1)(x - \xi_2)\cdots(x - \xi_n)\,,$$

dove $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sono le radici del polinomio $p(\cdot) - \eta$, per cui $p(\xi_k) = \eta$, per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$. Quindi, se dimostriamo che uno di questi ξ_k appartiene a $\sigma(A)$, abbiamo finito. Per assurdo, supponiamo che $\xi_k \in \rho(A)$, per $k = 1, 2, \ldots, n$. Per le proprietà di omomorfismo,

$$p(A) - \eta I = \alpha_n(A - \xi_1 I)(A - \xi_2 I)\cdots(A - \xi_n I)\,,$$

da cui vediamo che $p(A) - \eta I$ è invertibile, con inversa

$$(p(A) - \eta I)^{-1} = \frac{1}{\alpha_n}(A - \xi_n I)^{-1}\cdots(A - \xi_2 I)^{-1}(A - \xi_1 I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\,,$$

in contraddizione con il fatto che $\eta \in \sigma(p(A))$. ■

Corollario 47 *Se A è autoaggiunto e il polinomio p ha coefficienti reali, allora*

$$\|p(A)\| = \max\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} .$$

Dimostrazione. È un'immediata conseguenza del teorema precedente e del Corollario 41. ∎

3.2 Funzioni continue

Denotiamo con $\mathcal{C}$ l'algebra delle funzioni continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supporremo ora che l'operatore $A \in \mathcal{L}(H)$ sia autoaggiunto. Sarà utile definire la seguente semi-norma:

$$\|\varphi\|_A = \max\{|\varphi(x)| : x \in \sigma(A)\} .$$

Ricordiamo che, se p è un polinomio a coefficienti reali, allora $\|p\|_A = \|p(A)\|$.

Siano $\alpha_1 = \min \sigma(A)$ e $\alpha_2 = \max \sigma(A)$. Se $\alpha_1 = \alpha_2$, allora $A = \alpha_1 I$ e si pone $\varphi(\alpha_1 I) = \varphi(\alpha_1) I$. Se invece $\alpha_1 < \alpha_2$, sappiamo che, per il teorema di approssimazione di Weierstrass, esiste una successione $(p_n)_n$ di polinomi (a coefficienti reali) tali che

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \le \frac{1}{n} ,$$

per ogni $x \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Questo fatto ci permetterà di definire un operatore $\varphi(A)$.

Teorema 48 *Esiste un unico operatore in $\mathcal{L}(H)$, che indicheremo con $\varphi(A)$, con la seguente proprietà: comunque presa una successione $(p_n)_n$ di polinomi tale che $\|p_n - \varphi\|_A \to 0$, si ha che*

$$\lim_n p_n(A) = \varphi(A) .$$

Inoltre, tale $\varphi(A)$ è autoaggiunto, e $\|\varphi(A)\| = \|\varphi\|_A$.

Dimostrazione. Sia $(p_n)_n$ una successione di polinomi tale che $\|p_n - \varphi\|_A \to 0$. Allora, presi $m, n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\|p_n(A) - p_m(A)\| = \|(p_n - p_m)(A)\| = \|p_n - p_m\|_A ,$$

da cui segue che $(p_n(A))_n$ è una successione di Cauchy, e pertanto converge ad un operatore in $\mathcal{L}(H)$, che chiamiamo $\varphi(A)$. Notiamo che

$$\|\varphi(A)\| = \|\lim_n p_n(A)\| = \lim_n \|p_n(A)\| = \lim_n \|p_n\|_A = \|\varphi\|_A .$$

Sia ora $(q_n)_n$ un'altra successione di polinomi tale che $\|q_n - \varphi\|_A \to 0$. Allora,

$$\lim_n \|p_n(A) - q_n(A)\| = \lim_n \|(p_n - q_n)(A)\| = \lim_n \|p_n - q_n\|_A = 0 ,$$

per cui anche $(q_n(A))_n$ deve convergere allo stesso operatore $\varphi(A)$. Vediamo inoltre che, facendo uso del Teorema 24,

$$\varphi(A)^* = [\lim_n p_n(A)]^* = \lim_n p_n(A)^* = \lim_n p_n(A) = \varphi(A) ,$$

per cui $\varphi(A)$ è autoaggiunto. ∎

Teorema 49 *La funzione che ad ogni $\varphi \in \mathcal{C}$ associa $\varphi(A) \in \mathcal{L}(H)$ è un omomorfismo tra algebre: se $\varphi, \psi \in \mathcal{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha*

$$(\varphi + \psi)(A) = \varphi(A) + \psi(A)\,, \quad (\alpha\varphi)(A) = \alpha\varphi(A)\,, \quad (\varphi\psi)(A) = \varphi(A)\psi(A)\,.$$

Dimostrazione. La prima parte si ottiene facilmente, considerando due successioni $(p_n)_n$ e $(q_n)_n$ di polinomi tali che $\|p_n - \varphi\|_A \to 0$ e $\|q_n - \psi\|_A \to 0$, e passando al limite nelle rispettive uguaglianze. ■

Osserviamo che continua a valere la commutatività

$$\varphi(A)\psi(A) = \psi(A)\varphi(A)\,.$$

Vediamo ora come viene trasformato lo spettro. A tal scopo, premettiamo un risultato generale sull'estendibilità delle funzioni continue.

Teorema 50 *Sia X uno spazio metrico, ed $E \subseteq X$ un compatto. Se $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, esiste una sua estensione continua $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Denotiamo con $C(E)$ lo spazio di Banach delle funzioni continue $f : E \to \mathbb{R}$, dotato della norma $\|f\|_\infty = \max\{|f(u)| : u \in E\}$. Sia $\mathcal{A} \subseteq C(E)$ l'insieme delle funzioni che ammettono un'estensione continua su tutto X. Si dimostra facilmente che $\mathcal{A}$ è una sottoalgebra di $C(E)$. Chiaramente, $\mathcal{A}$ contiene le costanti, perché esse possono essere estese a tutto X mantenendo lo stesso valore costante. Inoltre, $\mathcal{A}$ separa i punti: se x e y sono due punti distinti di E, la funzione $f(u) = d(u, x)$ è tale che $f(x) = 0 \neq f(y)$. Per il Teorema di Stone–Weierstrass, quindi, $\mathcal{A}$ è denso in $C(E)$.

Osserviamo che ogni funzione $f \in \mathcal{A}$ può essere estesa a una funzione continua e anche limitata su tutto X in modo da mantenere lo stesso valore minimo e massimo. Infatti, siano $m = \min_E f$ e $M = \max_E f$; se $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ è un'estensione continua di f, ponendo

$$f^*(u) = \min\{\max\{\hat{f}(u), m\}, M\}\,,$$

si ha che $f^* : X \to \mathbb{R}$ estende f, è continua, e $\min f^* = m$, $\max f^* = M$. Possiamo quindi supporre senza perdita di generalità che l'estensione $\hat{f}$ soddisfi $\min_X \hat{f} = \min_E f$ e $\max_X \hat{f} = \max_E f$.

Dimostreremo ora che $\mathcal{A}$ è un insieme chiuso, il che completerà la dimostrazione. Sia dunque $(f_n)_n$ una successione in $\mathcal{A}$, che converge uniformemente a una funzione $g \in C(E)$. Vogliamo vedere che $g \in \mathcal{A}$. Sia $(f_{n_k})_k$ una sottosuccessione tale che $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_\infty \leq 2^{-k}$, per ogni k. Ponendo $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$, possiamo scrivere

$$g(u) = f_{n_1}(u) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(u)\,.$$

Siccome $g_k \in \mathcal{A}$, esiste un'estensione continua e limitata $\hat{g}_k : X \to \mathbb{R}$, con $\min_X \hat{g}_k = \min_E g_k$ e $\max_X \hat{g}_k = \max_E g_k$. Possiamo allora definire $\hat{g} : X \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\hat{g}(u) = \hat{f}_{n_1}(u) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{g}_k(u)\,,$$

in quanto la serie converge totalmente, essendo che $\sup\{|\hat{g}_k(u)| : u \in X\} \leq 2^{-k}$, e quindi uniformemente. La funzione $\hat{g}$ è quindi continua su tutto X, ed estende g. Pertanto, $g \in \mathcal{A}$. ■

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

Teorema 51 *Si ha*

$$\sigma(\varphi(A)) = \varphi(\sigma(A))\,,$$

per cui

$$\lambda \in \sigma(A) \;\Leftrightarrow\; \varphi(\lambda) \in \sigma(\varphi(A))\,.$$

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \sigma(A)$, per cui $\varphi(\lambda) \in \varphi(\sigma(A))$; vogliamo vedere che $\varphi(\lambda) \in \sigma(\varphi(A))$. Per assurdo, supponiamo che sia $\varphi(\lambda) \in \rho(\varphi(A))$, per cui esiste $(\varphi(A) - \varphi(\lambda)I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Scegiamo allora un polinomio p tale che

$$\|p - \varphi\|_A < \frac{1}{2\|(\varphi(A) - \varphi(\lambda)I)^{-1}\|}\,.$$

Essendo

$$\begin{aligned}\|[\varphi(A) - \varphi(\lambda)I] - [p(A) - p(\lambda)I]\| &\leq \|\varphi(A) - p(A)\| + |\varphi(\lambda) - p(\lambda)| \\ &\leq 2\|p - \varphi\|_A < \frac{1}{\|(\varphi(A) - \varphi(\lambda)I)^{-1}\|}\,,\end{aligned}$$

per il Corollario 33 si ha che $0 \in \rho(p(A) - p(\lambda)I)$, ossia $p(\lambda) \notin \sigma(p(A))$, ovvero, per il Teorema 46, $p(\lambda) \notin p(\sigma(A))$, una contraddizione.

Prendiamo ora un $\eta \in \sigma(\varphi(A))$. Vogliamo dimostrare che esiste un $\xi \in \sigma(A)$ per cui $\varphi(\xi) = \eta$. Supponiamo per assurdo che non sia così, ossia che $\varphi(x) - \eta \neq 0$, per ogni $x \in \sigma(A)$. Consideriamo la funzione $\mathcal{F} : \sigma(A) \to \mathbb{R}$, definita da

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{\varphi(x) - \eta}\,.$$

Essendo $\mathcal{F}$ continua e $\sigma(A)$ chiuso, il Teorema di Tietze ci permette di estendere $\mathcal{F}$ ad una funzione continua $\widetilde{\mathcal{F}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita su tutto $\mathbb{R}$. Abbiamo quindi che

$$\|\widetilde{\mathcal{F}}(A)[\varphi(A) - \eta I] - I\| = \|\widetilde{\mathcal{F}}(\cdot)[\varphi(\cdot) - \eta] - 1\|_A = 0\,,$$

e

$$\|[\varphi(A) - \eta I]\widetilde{\mathcal{F}}(A) - I\| = \|[\varphi(\cdot) - \eta]\widetilde{\mathcal{F}}(\cdot) - 1\|_A = 0\,.$$

Pertanto, $\varphi(A) - \eta I$ è invertibile, con inversa

$$(\varphi(A) - \eta I)^{-1} = \widetilde{\mathcal{F}}(A) \in \mathcal{L}(H)\,,$$

per cui $\eta \notin \sigma(\varphi(A))$, una contraddizione. ∎

Corollario 52 *Se $\varphi, \psi \in \mathcal{C}$ sono tali che $\varphi(x) \leq \psi(x)$ per ogni $x \in \sigma(A)$, allora $\varphi(A) \leq \psi(A)$.*

Dimostrazione. Sia $\xi = \psi - \varphi$. Si ha che $\xi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \sigma(A)$. Essendo $\sigma(\xi(A)) = \xi(\sigma(A)) \subseteq [0, +\infty[$, dal Corollario 40 segue che $\xi(A) \geq 0$, ossia $\varphi(A) \leq \psi(A)$. ∎

3.3 Funzioni semi-continue superiormente

Una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è semi-continua superiormente (in breve, s.c.s.), se è limite puntuale di una successione decrescente di funzioni continue.

Nel seguito, data una successione $(B_n)_n$ in $\mathcal{L}(H)$ e un ulteriore operatore $B \in \mathcal{L}(H)$, scriveremo

$$B = \text{s-}\lim_n B_n$$

se, per ogni $f \in H$, si ha $\lim_n B_n f = Bf$. Ci sarà utile il seguente

Lemma 53 *Sia $(B_n)_n$ in $\mathcal{L}(H)$ una successione di operatori autoaggiunti tale che*

$$B_0 \geq B_1 \geq \ldots \geq B_n \geq \ldots \geq 0\,.$$

Allora esiste un $B \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunto e monotono tale che $\text{s-}\lim_n B_n = B$. *Inoltre, $B \leq B_n$, per ogni n.*

Dimostrazione. Osserviamo che, presi $m \leq n$, si ha che $0 \leq B_m - B_n \leq B_0$, per cui

$$\|B_m - B_n\| = \sup_{\|f\|=1} \langle (B_m - B_n)f, f\rangle \leq \sup_{\|f\|=1} \langle B_0 f, f\rangle = \|B_0\|\,.$$

Inoltre, per ogni $f \in H$, la successione di numeri reali $(\langle B_n f, f\rangle)_n$ è decrescente e non-negativa, per cui converge. Usando il Lemma 38,

$$\|(B_m - B_n)f\|^2 \leq \|B_m - B_n\| \langle (B_m - B_n)f, f\rangle \leq \|B_0\| [\langle B_m, f\rangle - \langle B_n, f\rangle]\,,$$

e ne consegue che la successione $(B_n f)_n$ è di Cauchy, e pertanto converge. Denotiamo con Bf il suo limite. Abbiamo così definito una funzione $B : H \to H$. Verifichiamo che è lineare: se $f, g \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$B(\alpha f + \beta g) = \lim_n B_n(\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_m B_n f + \beta \lim_n B_n g = \alpha Bf + \beta Bg\,.$$

Siccome poi

$$\langle Bf, g\rangle = \lim_n \langle B_n f, g\rangle = \lim_n \langle f, B_n g\rangle = \langle f, Bg\rangle\,,$$

abbiamo che $B = B^*$. Inoltre, per ogni $f \in H$ e ogni n,

$$0 \le \langle Bf, f\rangle \le \langle B_n f, f\rangle\,.$$

Dal Teorema 37 segue che $B \in \mathcal{L}(H)$, e la dimostrazione è completa. ■

Continueremo a supporre che $A \in \mathcal{L}(H)$ sia un operatore autoaggiunto.

Teorema 54 *Data una funzione s.c.s. non-negativa $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esiste un unico operatore $\varphi(A) \in \mathcal{L}(H)$ con la seguente proprietà: comunque presa una successione decrescente $(\varphi_n)_n$ di funzioni continue che tende puntualmente a φ, si ha*

$$\varphi(A) = \text{s}-\lim_n \varphi_n(A)\,.$$

Inoltre, tale $\varphi(A)$ è autoaggiunto e monotono.

<u>Dimostrazione</u>. Sia $(\varphi_n)_n$ come nell'enunciato. Allora $(\varphi_n(A))_n$ è una successione decrescente di operatori autoaggiunti monotoni, e per il lemma precedente esiste un operatore, che indichiamo con $\varphi(A)$, tale che $\text{s}-\lim_n \varphi_n(A) = \varphi(A)$. Tale $\varphi(A)$ è autoaggiunto e monotono.

Se $(\widetilde{\varphi}_n)_n$ è un'altra successione descente di funzioni continue che tende puntualmente a φ, avremo che esiste un operatore, che indichiamo con $\widetilde{\varphi(A)}$, tale che $\text{s}-\lim_n \widetilde{\varphi}_n(A) = \widetilde{\varphi(A)}$. Notiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni m esiste un $n(x,m)$ tale che, se $n \ge n(x,m)$,

$$\varphi_n(x) < \widetilde{\varphi}_m(x) + \frac{1}{m}\,.$$

Per continuità, per ogni x esiste un intorno aperto U_x di x tale che, se $n \ge n(x,m)$ e $y \in U_x$, allora

$$\varphi_n(y) \le \widetilde{\varphi}_m(y) + \frac{1}{m}\,.$$

Possiamo ricoprire $\sigma(A)$ con un numero finito di tali intorni $U_{x_1}, \dots, U_{x_k}$. Definendo $n(m) = \max\{n(x_1,m), \dots, n(x_k,m)\}$, abbiamo che, se $n \ge n(m)$,

$$\varphi_n(x) < \widetilde{\varphi}_m(x) + \frac{1}{m}\,, \quad \text{per ogni } x \in \sigma(A)\,.$$

Pertanto, se $n \ge n(m)$,

$$\varphi(A) \le \varphi_n(A) \le \widetilde{\varphi}_m(A) + \frac{1}{m}\,I\,,$$

e quindi

$$\varphi(A) \le \text{s}-\lim_m \left[\widetilde{\varphi}_m(A) + \frac{1}{m}\,I\right] = \widetilde{\varphi(A)}\,.$$

Scambiando i ruoli di $(\varphi_n)_n$ e $(\widetilde{\varphi}_n)_n$, si dimostra analogamente che $\widetilde{\varphi(A)} \le \varphi(A)$. Quindi, $\widetilde{\varphi(A)} = \varphi(A)$, e l'unicità è dimostrata. ■

Consideriamo ora la classe di funzioni

$$\mathcal{R} = \{\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 : \varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ sono s.c.s. e non-negative}\}.$$

Si può verificare che $\mathcal{R}$ è un'algebra, con le solite operazioni.

Teorema 55 *Data una funzione $\varphi \in \mathcal{R}$, esiste un unico operatore $\varphi(A) \in \mathcal{L}(H)$ con la seguente proprietà: se $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, con $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.c.s. e non-negative, allora*

$$\varphi(A) = \varphi_1(A) - \varphi_2(A).$$

Tale operatore $\varphi(A)$ è autoaggiunto. La funzione che ad ogni $\varphi \in \mathcal{R}$ associa $\varphi(A) \in \mathcal{L}(H)$ è un omomorfismo tra algebre. Inoltre, se $\varphi, \psi \in \mathcal{R}$ sono tali che $\varphi(x) \leq \psi(x)$ per ogni $x \in \sigma(A)$, allora $\varphi(A) \leq \psi(A)$.

Dimostrazione. Se φ, ψ sono s.c.s e non-negative, anche $\varphi + \psi$ lo è. Se $(\varphi_n)_n$ e $(\psi_n)_n$ sono le rispettive successioni decrescenti di funzioni continue che convergono a φ e ψ, si ha

$$(\varphi + \psi)(A) = \text{s}-\lim_n (\varphi_n + \psi_n)(A) = \text{s}-\lim_n (\varphi_n(A) + \psi_n(A)) = \varphi(A) + \psi(A).$$

Se si ha che $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ e allo stesso tempo $\varphi = \widetilde{\varphi}_1 - \widetilde{\varphi}_2$, con $\varphi_1, \varphi_2, \widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2$ s.c.s. e non-negative, allora $\varphi_1 + \widetilde{\varphi}_2 = \widetilde{\varphi}_1 + \varphi_2$, e pertanto

$$\varphi_1(A) + \widetilde{\varphi}_2(A) = \widetilde{\varphi}_1(A) + \varphi_2(A),$$

da cui

$$\varphi_1(A) - \varphi_2(A) = \widetilde{\varphi}_1(A) - \widetilde{\varphi}_2(A).$$

Questo dimostra che l'operatore $\varphi(A)$ è ben definito. Tutte le proprietà enunciate sono ora di immediata verifica. ■

4 Decomposizione spettrale

4.1 Il teorema principale

Sia ora $\varphi_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq \lambda, \\ 0 & \text{se } x > \lambda. \end{cases}$$

Come facilmente si vede, si ha che

$$\varphi_\lambda(x) = \lim_n \varphi_{\lambda,n}(x),$$

dove $(\varphi_{\lambda,n})_n$ è la successione derescente di funzioni continue così definite:

$$\varphi_{\lambda,n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \le \lambda\,, \\ 1 - n(x-\lambda) & \text{se } \lambda \le x \le \lambda + \frac{1}{n}\,, \\ 0 & \text{se } x \ge \lambda + \frac{1}{n}\,. \end{cases}$$

Quindi, la funzione φ_λ è s.c.s. e non-negativa, per cui resta definito l'operatore autoaggiunto $\varphi_\lambda(A)$. Si noti che

$$\varphi_\lambda(A)\varphi_\lambda(A) = (\varphi_\lambda\varphi_\lambda)(A) = \varphi_\lambda(A)\,,$$

per cui $\varphi_\lambda(A)$, oltre a essere autoaggiunto, è anche idempotente, quindi è una proiezione ortogonale, e verrà denotato con

$$P(\lambda) = \varphi_\lambda(A)\,.$$

L'insieme $\{P(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ prende il nome di **famiglia spettrale** di A. Ne analizzeremo ora le principali proprietà.

a) Se $\lambda < \lambda'$, essendo $\varphi_\lambda \le \varphi_{\lambda'}$, avremo che $\varphi_\lambda(A) \le \varphi_{\lambda'}(A)$. Pertanto,

$$\lambda < \lambda' \ \Rightarrow\ P(\lambda) \le P(\lambda')\,.$$

b) Se $\lambda < \alpha_1$, si ha che $\varphi_\lambda(x) = 0$ per ogni $x \in \sigma(A)$, per cui $\varphi_\lambda(A) = 0$. Se invece $\lambda \ge \alpha_2$, allora $\varphi_\lambda(x) = 1$ per ogni $x \in \sigma(A)$, per cui $\varphi_\lambda(A) = I$. Quindi:

$$\lambda < \alpha_1 \ \Rightarrow\ P(\lambda) = 0\,, \qquad \lambda \ge \alpha_2 \ \Rightarrow\ P(\lambda) = I\,.$$

Sfruttando la crescenza dimostrata nel punto a), scriveremo brevemente, con notazione di semplice interpretazione,

$$P(\alpha_1 - 0) = 0\,, \quad P(\alpha_2) = I\,.$$

c) Sussiste il seguente tipo di continuità da destra:

$$P(\lambda) = \text{s}-\lim_{\mu\to\lambda^+} P(\mu)\,.$$

Infatti, se $(\theta_n)_n$ è una successione positiva decrescente con limite zero, con le notazioni introdotte sopra si ha che

$$\varphi_\lambda \le \varphi_{\lambda+\theta_n} \le \varphi_{\lambda+\theta_n,n}\,,$$

per cui

$$P(\lambda) \le P(\lambda+\theta_n) \le \varphi_{\lambda+\theta_n,n}(A)\,.$$

Passando al limite,

$$P(\lambda) \le \text{s}-\lim_n P(\lambda+\theta_n) \le \text{s}-\lim_n \varphi_{\lambda+\theta_n,n}(A) = P(\lambda)\,,$$

da cui

$$P(\lambda) = \text{s}-\lim_n P(\lambda + \theta_n)\,.$$

Scriveremo brevemente

$$P(\lambda) = P(\lambda + 0)\,.$$

Nota. Si può anche dimostrare l'esistenza del limite da sinistra, per cui possiamo scrivere $P(\lambda - 0) \leq P(\lambda)$, ma non è detto che valga l'uguaglianza. La notazione qui usata è coerente con quella del punto a).

d) Consideriamo una funzione continua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e fissiamo un $\theta > 0$. La funzione è uniformemente continua su $[\alpha_1 - \theta, \alpha_2]$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\Big[x, x' \in [\alpha_1 - \theta, \alpha_2]\,,\; |x - x'| \leq \delta\Big] \;\Rightarrow\; |\phi(x) - \phi(x')| \leq \varepsilon\,.$$

Prendiamo una partizione $\delta-$fine di $[\alpha_1 - \theta, \alpha_2]$, ossia scegliamo dei punti λ_j, tali che

$$\alpha_1 - \theta = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m = \alpha_2\,,$$

con $\lambda_j - \lambda_{j-1} \leq \delta$, per ogni $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Scegliamo inoltre, in ogni intervallo $[\lambda_{j-1}, \lambda_j]$, un punto λ'_j, in modo arbitrario. Abbiamo così una "partizione puntata", detta anche P-partizione. Osserviamo che, per ogni $x \in [\alpha_1 - \theta, \alpha_2]$, si ha

$$-\varepsilon \leq \phi(x) - \sum_{j=1}^m \phi(\lambda'_j)(\varphi_{\lambda_j}(x) - \varphi_{\lambda_{j-1}}(x)) \leq \varepsilon\,.$$

Pertanto, passando agli operatori associati,

$$-\varepsilon I \leq \phi(A) - \sum_{j=1}^m \phi(\lambda'_j)(P(\lambda_j) - P(\lambda_{j-1})) \leq \varepsilon I\,.$$

Usando il Teorema 37, ne segue che

$$\left\|\phi(A) - \sum_{j=1}^m \phi(\lambda'_j)(P(\lambda_j) - P(\lambda_{j-1}))\right\| \leq \varepsilon\,.$$

Riassumendo, si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;:\; \left\|\phi(A) - \sum_{j=1}^m \phi(\lambda'_j)(P(\lambda_j) - P(\lambda_{j-1}))\right\| \leq \varepsilon\,,$$

per ogni P-partizione $\delta-$fine di $[\alpha_1 - \theta, \alpha_2]$. L'operatore $\phi(A)$ può essere approssimato in tal modo da una somma di Riemann–Stieltjes. Scriveremo allora brevemente

$$\phi(A) = \int_{\alpha_1 - \theta}^{\alpha_2} \phi(\lambda)\, dP(\lambda)\,.$$

Questa formula è vera per ogni $\theta > 0$, ma non possiamo togliere del tutto tale θ. Osserviamo infatti che, anche se nella somma di Riemann–Stieltjes i primi termini potrebbero essere nulli, per cui non è restrittivo supporre che sia $\lambda_1 = \alpha_1$, resta il fatto che potrebbe essere non nullo il termine

$$\phi(\lambda_1')(P(\lambda_1) - P(\lambda_0)) = \phi(\lambda_1')P(\alpha_1)\,.$$

Per evitare di dover ogni volta dire che la formula vale per ogni $\theta > 0$, useremo la notazione

$$\phi(A) = \int_{\alpha_1 - 0}^{\alpha_2} \phi(\lambda)\, dP(\lambda)\,.$$

Possiamo ora enunciare il "Teorema di decomposizione spettrale" per un operatore limitato autoaggiunto.

Teorema 56 *Sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore limitato autoaggiunto e siano $\alpha_1 = \min \sigma(A)$, $\alpha_2 = \max \sigma(A)$. Allora è univocamente determinata una famiglia di proiezioni ortogonali $\{P(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ con le seguenti proprietà:*

a) $\lambda < \lambda' \Rightarrow P(\lambda) \leq P(\lambda')$ *;*

b) $P(\alpha_1 - 0) = 0$, $P(\alpha_2) = I$*;*

c) $P(\lambda + 0) = P(\lambda)$ *;*

d) $A = \displaystyle\int_{\alpha_1 - 0}^{\alpha_2} \lambda\, dP(\lambda)$ *.*

<u>Dimostrazione</u>. Per quanto riguarda l'esistenza, basta prendere la funzione $\phi(x) = x$ e procedere come sopra. Per la dimostrazione dell'unicità, si veda il libro di Helmberg [1]. ■

4.2 Alcune ulteriori proprietà

Da quanto sopra, per ogni funzione continua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si hanno le formule

$$\phi(A)f = \int_{\alpha_1 - 0}^{\alpha_2} \phi(\lambda)\, d[P(\lambda)f]\,,$$

$$\langle \phi(A)f, g\rangle = \int_{\alpha_1 - 0}^{\alpha_2} \phi(\lambda)\, d[\langle P(\lambda)f, g\rangle]\,,$$

$$\|\phi(A)f\|^2 = \int_{\alpha_1 - 0}^{\alpha_2} |\phi(\lambda)|^2\, d\left[\|P(\lambda)f\|^2\right]\,,$$

che vanno interpretate usando le relative somme di Riemann–Stieltjes.

Vediamo come la famiglia spettrale può essere usata per caratterizzare lo spettro di A.

Teorema 57 *Si ha:*

$$\mu \in \sigma(A) \quad \Leftrightarrow \quad \forall r > 0 \quad P(\mu - r) \neq P(\mu + r)\,.$$

Dimostrazione. Sia $\mu \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$. Essendo $\rho(A)$ aperto, esiste un $\delta > 0$ per cui $[\mu - 2\delta, \mu + 2\delta] \subseteq \rho(A)$. Con le notazioni già usate in precedenza, se n è sufficientemente grande, si ha che $\varphi_{\mu-\delta,n}(x) = \varphi_{\mu+\delta,n}(x)$ per ogni $x \in \sigma(A)$, per cui $\varphi_{\mu-\delta,n}(A) = \varphi_{\mu+\delta,n}(A)$. Quindi,

$$P(\mu - \delta) = \operatorname*{s-lim}_n \varphi_{\mu-\delta,n}(A) = \operatorname*{s-lim}_n \varphi_{\mu+\delta,n}(A) = P(\mu + \delta)\,.$$

Viceversa, supponiamo che sia $P(\mu - \delta) = P(\mu + \delta)$, per un certo $\delta > 0$. Prendendo $\mu - \delta$ e $\mu + \delta$ tra i punti di suddivisione della P-partizione di $[\alpha_1 - \theta, \alpha_2]$, possiamo scrivere, per ogni funzione continua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\phi(A) = \int_{\alpha_1 - 0}^{\mu - \delta} \phi(\lambda)\, dP(\lambda) + \int_{\mu+\delta}^{\alpha_2} \phi(\lambda)\, dP(\lambda)\,.$$

(Come al solito, qui $\theta > 0$ è un numero arbitrario.) Prendiamo in particolare la funzione $\phi(x) = (x - \mu)\psi(x)$, dove

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - \mu} & \text{se } |x - \mu| \geq \delta \\[2ex] \dfrac{x - \mu}{\delta^2} & \text{se } |x - \mu| \leq \delta\,. \end{cases}$$

Si noti che $\phi(x) = x$ se $x \in [\alpha_1 - \theta, \mu - \delta] \cup [\mu + \delta, \alpha_2]$. Allora

$$\begin{aligned} \phi(A) &= (A - \mu I)\psi(A) = \psi(A)(A - \mu I) \\ &= \int_{\alpha_1 - 0}^{\mu - \delta} \phi(\lambda)\, dP(\lambda) + \int_{\mu+\delta}^{\alpha_2} \phi(\lambda)\, dP(\lambda) \\ &= [P(\mu - \delta) - 0] + [I - P(\mu + \delta)] = I\,. \end{aligned}$$

Pertanto, si ha che $(A - \mu I)^{-1} = \psi(A) \in \mathcal{L}(H)$, per cui $\mu \in \rho(A)$. ■

Teorema 58 *Si ha che*

$$\mu \text{ è un autovalore di } A \quad \Leftrightarrow \quad P(\mu - 0) \neq P(\mu)\,.$$

In tal caso, $P(\mu) - P(\mu - 0)$ è la proiezione ortogonale sull'autospazio

$$\{f \in H : Af = \mu f\}\,.$$

In particolare, se μ è un punto isolato di $\sigma(A)$, esso è certamente un autovalore.

Dimostrazione. Essendo $P(\mu-0) \leq P(\mu)$, per il Teorema 44 si ha che $P(\mu) - P(\mu-0)$ è la proiezione ortogonale sul sottospazio

$$\mathcal{M} = \mathcal{I}(P(\mu)) \cap \mathcal{I}(P(\mu-0))^{\perp}.$$

Quindi, se $P(\mu-0) \neq P(\mu)$, si ha che

$$f \in \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad P(\lambda)f = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < \mu \\ f & \text{se } \lambda \geq \mu\,. \end{cases}$$

Prendendo μ come uno degli elementi della somma di Riemann–Stieltjes che approssima l'integrale

$$Af = \int_{\alpha_1-0}^{\alpha_2} \lambda\, d[P(\lambda)f],$$

si vede che uno solo dei termini di tale somma è diverso da zero, e vale $\mu\, P(\mu)f$, cioè μf. Quindi deve essere $Af = \mu f$.

Viceversa, supponiamo che $\mu \in [\alpha_1, \alpha_2]$ sia tale che $(A - \mu I)f = 0$, per un certo $f \neq 0$. Allora

$$0 = \|(A-\mu I)f\|^2 = \int_{\alpha_1-0}^{\alpha_2} (\lambda-\mu)^2\, d\left[\|P(\lambda)f\|^2\right] .$$

Se per un certo $\bar{\lambda} \in [\alpha_1, \mu[$ si avesse che $\|P(\bar{\lambda})f\| > 0$, allora sarebbe

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_1-0}^{\alpha_2} (\lambda-\mu)^2\, d\left[\|P(\lambda)f\|^2\right] &\geq \int_{\alpha_1-0}^{\bar{\lambda}} (\mu-\lambda)^2\, d\left[\|P(\lambda)f\|^2\right] \\
&\geq (\mu-\bar{\lambda})^2 \int_{\alpha_1-0}^{\bar{\lambda}} d\left[\|P(\lambda)f\|^2\right] \\
&= (\mu-\bar{\lambda})^2 \|P(\bar{\lambda})f\|^2 > 0\,,
\end{aligned}$$

in contraddizione con quanto sopra.

D'altra parte, se per un certo $\bar{\lambda} \in]\mu, \alpha_2[$ si avesse che $\|P(\bar{\lambda})f\| < \|f\|$, allora sarebbe

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_1-0}^{\alpha_2} (\lambda-\mu)^2\, d\left[\|P(\lambda)f\|^2\right] &\geq \int_{\bar{\lambda}}^{\alpha_2} (\lambda-\mu)^2\, d\left[\|P(\lambda)f\|^2\right] \\
&\geq (\bar{\lambda}-\mu)^2 \int_{\bar{\lambda}}^{\alpha_2} d\left[\|P(\lambda)f\|^2\right] \\
&= (\bar{\lambda}-\mu)^2 \left[\|f\|^2 - \|P(\bar{\lambda})f\|^2\right] > 0\,,
\end{aligned}$$

nuovamente in contraddizione con quanto sopra.

Tenendo conto della continuità da destra della famiglia spettrale, abbiamo così dimostrato che

$$\|P(\lambda)f\| = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < \mu \\ \|f\| & \text{se } \lambda \geq \mu \,. \end{cases}$$

Ne segue che $\|[P(\mu)-P(\mu-0)]f\| = \|f\|$. Essendo $P(\mu)-P(\mu-0)$ la proiezione ortogonale su $\mathcal{M}$, concludiamo che $f \in \mathcal{M}$, quindi $[P(\mu) - P(\mu - 0)]f = f$. Pertanto, $P(\mu - 0) \neq P(\mu)$, il che conclude la dimostrazione. ■

4.3 Operatori autoaggiunti non limitati

Concludiamo con un accenno al teorema di decomposizione spettrale per gli operatori autoaggiunti non limitati.

Teorema 59 *Sia $L : D(L) \subseteq H \to H$ un operatore autoaggiunto. Allora è univocamente determinata una famiglia di proiezioni ortogonali $\{P(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ con le seguenti proprietà:*

a) $\lambda < \lambda' \Rightarrow P(\lambda) \leq P(\lambda')$ *;*

b) $\text{s}-\lim_{\lambda\to-\infty} P(\lambda) = 0\,, \quad \text{s}-\lim_{\lambda\to+\infty} P(\lambda) = I$ *;*

c) $P(\lambda + 0) = P(\lambda)$ *;*

e) per ogni $x \in D(L)$*,* $Lx = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d[P(\lambda)x]\,.$

La proprietà e) ha il seguente significato: per ogni $x \in D(L)$ e ogni $\varepsilon > 0$, esistono un $\delta > 0$ e un $R > 0$ tali che, presi $\alpha \leq -R$ e $\beta \geq R$, per ogni P-partizione $\delta-$fine di $[\alpha, \beta]$ si ha

$$\left\| Lx - \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j (P(\lambda_j) - P(\lambda_{j-1}))x \right\| \leq \varepsilon\,.$$

Per la dimostrazione del teorema, si veda il libro di Helmberg [1].

5 Operatori compatti

5.1 Considerazioni preliminari

Diremo che un operatore $A \in \mathcal{L}(H)$ è **compatto** se trasforma insiemi limitati in insiemi relativamente compatti. Equivalentemente, un operatore è compatto se la successione immagine di ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente.

Teorema 60 *Se A è compatto e $B \in \mathcal{L}(H)$, allora AB e BA sono compatti.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che B manda limitati in limitati, e compatti in compatti. ■

Teorema 61 *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è compatto, allora anche A^* è compatto.*

Dimostrazione. Sia $(g_n)_n$ una successione in H limitata in norma da una costante $C > 0$. Allora

$$\begin{aligned}\|A^*g_n - A^*g_m\|^2 &= \langle A^*(g_n - g_m), A^*(g_n - g_m)\rangle \\ &= \langle AA^*(g_n - g_m), g_n - g_m\rangle \\ &\leq \|AA^*g_n - AA^*g_m\| \, \|g_n - g_m\| \\ &\leq 2C\|AA^*g_n - AA^*g_m\|.\end{aligned}$$

Essendo AA^* compatto, esiste una sottosuccessione $(AA^*g_{n_k})_k$ che converge. Allora $(A^*g_{n_k})_k$ è di Cauchy, e pertanto converge. Ciò dimostra che A^* è compatto. ■

Faremo uso del seguente risultato.

Teorema 62 *Lo spazio H ha dimensione finita se e solo se la palla unitaria chiusa $\overline{B}_1$ è compatta.*

Dimostrazione. Se H ha dimensione finita, è noto che $\overline{B}_1$ è compatta. Se H ha dimensione infinita, sia (E_n) una successione di sottospazi di H, E_n avente dimensione n, tali che $E_n \subseteq E_{n+1}$. Costruisco una successione $(u_n)_n$ in $\overline{B}_1$ in questo modo: $u_0 = 0$ e, per ogni n, prendo $u_{n+1} \in E_{n+1} \cap E_n^\perp$ tale che $\|u_{n+1}\| = 1$. Allora $\|u_{n+1} - u_n\| \geq 1$, per ogni n, e quindi $(u_n)_n$ non può avere sottosuccessioni convergenti. In conclusione, $\overline{B}_1$ non è compatta. ■

5.2 Lo spettro di un operatore compatto

Vedreamo nei due teoremi seguenti come è fatto lo spettro di un operatore compatto.

Teorema 63 *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è compatto e H ha dimensione infinita, allora $0 \in \sigma(A)$.*

Dimostrazione. Se $0 \in \rho(A)$, per il Teorema 60 abbiamo che $A^{-1}A$ è compatto, e quindi la palla unitaria chiusa $\overline{B}_1 = A^{-1}A(\overline{B}_1)$ è compatta. Per il Teorema 62, quindi, H deve avere dimensione finita. ■

Teorema 64 *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è compatto, allora $\sigma(A) \setminus \{0\}$ è costituito soltanto da autovalori isolati di molteplicità finita.*

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo per assurdo che $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ non sia un autovalore. (Questo può succedere solo se H ha dimensione infinita.)

Vediamo dapprima che $\mathcal{I}(A - \lambda I)$ è un sottospazio. Sia $(f_n)_n$ tale che $Af_n - \lambda f_n \to w$, per un certo $w \in H$. Vogliamo dimostrare che $w \in \mathcal{I}(A - \lambda I)$. Dimostriamo dapprima che $(f_n)_n$ è limitata. Se così non fosse, per una sottosuccessione (che per semplicità di notazione indichiamo ancora con $(f_n)_n$) avremmo che $\|f_n\| \to \infty$. Sia $g_n = f_n/\|f_n\|$. Allora $Ag_n - \lambda g_n \to 0$, e siccome A è compatto e $(g_n)_n$ è limitata, per una sottosuccessione si avrà che $Ag_{n_k} \to y$, per un certo $y \in H$. Allora $g_{n_k} \to \frac{1}{\lambda} y$, e quindi $Ay - \lambda y = 0$. Non essendo λ un autovalore, si ha che $y = 0$, in contraddizione col fatto che $\|g_n\| = 1$, per ogni n. Quindi, $(f_n)_n$ è limitata, e siccome A è compatto, esiste una sottosuccessione tale che $Af_{n_k} \to z$, per un certo $z \in H$. Allora $f_{n_k} \to \frac{1}{\lambda}(z - w)$ e, ponendo $\xi = \frac{1}{\lambda}(z - w)$, si ha che $A\xi = \lim_k Af_{n_k} = z$, e quindi

$$(A - \lambda I)\xi = z - \lambda\xi = w\,.$$

Ciò dimostra che $\mathcal{I}(A - \lambda I)$ è chiuso.

Dimostriamo ora che $A - \lambda I$ è biiettivo. Supponiamo per assurdo che il sottospazio $E_1 = (A - \lambda I)(H) = \mathcal{I}(A - \lambda I)$ sia strettamente contenuto in H. Abbiamo che $A(E_1) \subseteq E_1$. Considero allora $E_2 = (A - \lambda I)(E_1) = (A - \lambda I)^2(H)$. Chiaramente $E_2 \subseteq E_1$; inoltre, siccome $A - \lambda I$ è iniettivo, non essendo λ un autovalore, E_2 è un sottospazio strettamente contenuto in E_1 (altrimenti potrei trovare un elemento di E_1 che è immagine tramite $A - \lambda I$ sia di un elemento di E_1 stesso, sia di un elemento di $H \setminus E_1$.) Inoltre, $A(E_2) \subseteq E_2$. Iterando questo procedimento, definiamo così una successione di sottospazi $E_n = (A - \lambda I)^n(H)$ contenuti propriamente l'uno nell'altro. Possiamo allora costruire una successione $(u_n)_n$ in H in questo modo: $u_n \in E_n \cap E_{n+1}^{\perp}$ e $\|u_n\| = 1$. Presi n, m arbitrariamente, si ha

$$Au_n - Au_m = \Big((A - \lambda I)u_n - (A - \lambda I)u_m + \lambda u_n\Big) - \lambda u_m\,.$$

Se $n > m \geq 1$, si ha che $(A - \lambda I)u_n - (A - \lambda I)u_m + \lambda u_n \in E_{m+1}$, e siccome $d(u_m, E_{m+1}) = 1$, per ogni m, ne deduciamo che $\|Au_n - Au_m\| \geq |\lambda| > 0$, il che è assurdo, in quanto A è supposto compatto e $(u_n)_n$ è limitata. Quindi, $A - \lambda I$ è biiettivo.

Vedremo ora che $(A - \lambda I)^{-1}$ è continuo. Sia $(v_n)_n$ in H tale che $v_n \to v$, per un certo $v \in H$, e sia $f_n \in H$ tale che $Af_n - \lambda f_n = v_n$. Vogliamo vedere che $(f_n)_n$ converge ad un certo u tale che $Au - \lambda u = v$. Dimostriamo che $(f_n)_n$ è limitata. L'argomento è simile a quello visto sopra. Se così non fosse, ci sarebbe una sottosuccessione per cui $\|f_n\| \to \infty$. Allora, posto $g_n = f_n/\|f_n\|$, si ha che, per una sottosuccessione, $g_{n_k} \to z$, per un certo $z \in H$, e $Az = \lambda z$. Ne segue che $z = 0$, il che è assurdo in quanto $\|g_n\| = 1$, per ogni n. Quindi, $(f_n)_n$ è limitata, e, per una sottosuccessione, $(Af_{n_k})_k$ converge. Ne segue che esiste un $u \in H$ tale che $f_{n_k} \to u$ e $Au - \lambda u = v$. Notiamo ora che si ottiene la stessa conclusione anche se si parte da una qualunque sottosuccessione di $(f_n)_n$. Inoltre, il limite u a cui si perviene non può che essere unico, perchè se ce ne fosse un altro, $u' \neq u$, si avrebbe che $A(u - u') = \lambda(u - u')$, una contraddizione col fatto che λ non è un autovalore. In conclusione, $f_n \to u$ e $Au - \lambda u = v$.

Abbiamo quindi dimostrato che tutti gli elementi di $\sigma(A) \setminus \{0\}$ sono autovalori. Vediamo ora che hanno molteplicità finita. Siccome $\overline{B}_1 \cap \mathcal{N}(A - \lambda I) \subseteq \frac{1}{\lambda} A(\overline{B}_1)$, si ha che $\overline{B}_1 \cap \mathcal{N}(A - \lambda I)$ è compatta, e, per il Teorema 62, $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ ha dimensione finita.

Ci resta infine da dimostrare che tutti gli elementi di $\sigma(A) \setminus \{0\}$ sono isolati. Supponiamo per assurdo che esista una successione $(\lambda_n)_n$ di punti distinti di $\sigma(A) \setminus \{0\}$ che converge a un certo $\lambda \neq 0$. Per ogni n, esiste un $e_n \in H \setminus \{0\}$ tale che $Ae_n = \lambda_n e_n$. Ragionando per induzione, si può vedere che gli e_n sono tutti linearmente indipendenti. Sia F_n lo spazio generato da $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Si ha che $F_n \subseteq F_{n+1}$, $F_n \neq F_{n+1}$ e $(A - \lambda_n I)(F_n) \subseteq F_{n-1}$. Sia $(u_n)_n$ una successione tale che $u_n \in F_n \cap F_{n-1}^\perp$ e $\|u_n\| = 1$. Se $n > m \geq 2$, si ha

$$\left\| \frac{Au_n}{\lambda_n} - \frac{Au_m}{\lambda_m} \right\| = \left\| \left(\frac{Au_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{Au_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} - u_m \right) + u_n \right\| \geq 1.$$

Siccome $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, questo è in contraddizione con il fatto che $(Au_n)_n$ ha una sottosuccessione convergente. ■

5.3 Decomposizione spettrale di un operatore compatto autoaggiunto

Sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto e autoaggiunto. Allora, tutti i suoi autovalori sono numeri reali. Essi possono essere in numero finito o infinito, e possiamo ordinarli in una successione $(\hat{\lambda}_k)_k$, eventualmente ridotta a un numero finito di elementi, tale che

$$|\hat{\lambda}_1| \geq |\hat{\lambda}_2| \geq \ldots \geq |\hat{\lambda}_k| \geq \ldots > 0 \,.$$

Si noti che, se la successione è infinita, allora $\lim_k \hat{\lambda}_k = 0$, in quanto lo spettro non ha punti di accumulazione diversi da zero.

Sia $\widehat{\mathcal{M}}_k$ l'autospazio, di dimensione finita, relativo all'autovalore $\hat{\lambda}_k$, e sia $\widehat{P}_k$ la proiezione ortogonale su di esso. Ricordiamo che, essendo A autoaggiunto, gli spazi $\widehat{\mathcal{M}}_k$ sono a due a due ortogonali.

Distinguiamo due casi possibili, a seconda che gli autovalori diversi da zero siano in numero finito o meno. Se sono in numero finito, siano essi $\hat{\lambda}_1, \dots \hat{\lambda}_n$, possiamo scegliere un numero $\varepsilon > 0$ minore di tutti i loro valori assoluti. Allora

$$\begin{aligned} A &= \int_{\alpha_1 - 0}^{\alpha_2} \lambda \, dP(\lambda) \\ &= \int_{\alpha_1 - 0}^{-\varepsilon} \lambda \, dP(\lambda) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \lambda \, dP(\lambda) + \int_{\varepsilon}^{\alpha_2} \lambda \, dP(\lambda) \\ &= \int_{\alpha_1 - 0}^{-\varepsilon} \lambda \, dP(\lambda) + \int_{\varepsilon}^{\alpha_2} \lambda \, dP(\lambda) \, . \end{aligned}$$

Scegliendo i punti $\hat{\lambda}_1, \dots \hat{\lambda}_n$ nella P-partizione che approssima gli integrali, si vede che tale formula si può scrivere nella forma

$$A = \sum_{k=1}^{n} \hat{\lambda}_k \widehat{P}_k \, .$$

Si noti che, in questo caso, l'immagine di A è un sottospazio di dimensione finita.

Se invece gli autovalori sono in numero infinito, prendiamo $\varepsilon > 0$ in modo che $-\varepsilon \notin \sigma(A)$ ed $\varepsilon \notin \sigma(A)$, poniamo

$$R_\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \lambda \, dP(\lambda) \, ,$$

e notiamo che $\|R_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Se ε è sufficientemente piccolo, esiste un numero n per cui

$$|\hat{\lambda}_1| \geq |\hat{\lambda}_2| \geq \dots \geq |\hat{\lambda}_n| > \varepsilon > |\lambda_{n+1}| \geq \dots > 0 \, .$$

Scegliendo i punti $\hat{\lambda}_1, \dots \hat{\lambda}_n$ nella P-partizione che approssima gli integrali, abbiamo quindi che

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \hat{\lambda}_k \widehat{P}_k \right\| \leq \|R_\varepsilon\| \leq \varepsilon \, .$$

Facendo tendere ε a zero, avremo che $n \to +\infty$, e se ne deduce che

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\lambda}_k \widehat{P}_k \, .$$

Abbiamo così ottenuto la formula di decomposizione spettrale per un operatore compatto autoaggiunto.

5.4 Operatori a risolvente compatto

Diremo che un operatore L in H ha **risolvente compatto** se esiste un $\lambda \in \rho(L)$ tale che $(L-\lambda I)^{-1}$ è compatto.

Teorema 65 *Siano L un operatore in H avente risolvente compatto e $A \in \mathcal{L}(H)$. Se $\mathcal{N}(L-A)=\{0\}$, allora $0 \in \rho(L-A)$ e $(L-A)^{-1}$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(L)$ per cui $(L-\lambda I)^{-1}$ risulti compatto. Allora

$$L - A = [I - (A-\lambda I)(L-\lambda I)^{-1}](L-\lambda I),$$

per cui

$$\mathcal{N}(I-(A-\lambda I)(L-\lambda I)^{-1}) = \mathcal{N}(L-A) = \{0\}.$$

Dunque, 1 non è un autovalore dell'operatore compatto $(A-\lambda I)(L-\lambda I)^{-1}$, e, per il Teorema 64, deve essere che $1 \in \rho((A-\lambda I)(L-\lambda I)^{-1})$. Ne segue che $(I-(A-\lambda I)(L-\lambda I)^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ e si ha

$$(L-A)^{-1} = (L-\lambda I)^{-1}(I-(A-\lambda I)(L-\lambda I)^{-1})^{-1}.$$

Per il Teorema 60, essendo $(L-\lambda I)^{-1}$ compatto, anche $(L-A)^{-1}$ è compatto.

■

Come facile conseguenza del Teorema 65 si vede che, se L ha risolvente compatto, allora $(L-\mu I)^{-1}$ è compatto, per ogni $\mu \in \rho(L)$.

Teorema 66 *Sia L un operatore d.d. in H avente risolvente compatto. Allora anche L^* ha risolvente compatto.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(L)$. Essendo $(L-\lambda I)^{-1}$ compatto, per il teorema 3.1 si ha che $((L-\lambda I)^{-1})^*$ è compatto. Ma

$$((L-\lambda I)^{-1})^* = ((L-\lambda I)^*)^{-1} = (L^* - \lambda^* I)^{-1},$$

e perciò L^* ha risolvente compatto. ■

Teorema 67 *Se un operatore in H ha risolvente compatto, il suo spettro è al più numerabile, ed è costituito soltanto da autovalori isolati di molteplicità finita.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(L)$. Scriviamo

$$L - \mu I = -(\mu-\lambda)\left[(L-\lambda I)^{-1} - \frac{1}{\mu-\lambda} I\right](L-\lambda I),$$

per cui, se $\mu \neq \lambda$,

$$\mu \in \sigma(L) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu-\lambda} \in \sigma((L-\lambda I)^{-1}).$$

Inoltre,

$$\mathcal{N}(L-\mu I) = \mathcal{N}\left((L-\lambda I)^{-1} - \frac{1}{\mu-\lambda} I\right).$$

La conclusione segue allora dal Teorema 64. ■

Se L ha risolvente compatto, i suoi autovalori $\hat{\lambda}_k$ si possono ordinare in una successione,

$$|\hat{\lambda}_1| \leq |\hat{\lambda}_2| \leq |\hat{\lambda}_3| \leq \dots$$

Il loro numero può essere finito o infinito. Nel caso in cui gli autovalori siano infiniti, avremo che $\lim_k |\hat{\lambda}_k| = +\infty$.

Se L è autoaggiunto ed ha risolvente compatto, seguendo la procedura usata per gli operatori limitati, la formula di decomposizione spettrale si potrà scrivere nella seguente forma: per ogni $x \in D(L)$,

$$Lx = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\lambda}_k \widehat{P}_k x \, ,$$

dove P_k è la proiezione ortogonale sull'autospazio, di dimensione finita, relativo a $\hat{\lambda}_k$.

6 Un accenno alla meccanica quantistica

Nella teoria della meccanica quantistica, si assume che un sistema fisico isolato sia determinato da un vettore non nullo f dello spazio di Hilbert

$$H = L^2(\Omega, \mathbb{C}) \, .$$

Qui Ω può essere un intervallo di $\mathbb{R}$ o, in generale, un dominio in $\mathbb{R}^N$. Chiameremo f **vettore di stato**; in genere, possiamo sempre normalizzarlo e supporre quindi che

$$||f|| = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} = 1 \, .$$

Nota. Il vettore di stato cambia nel tempo in accordo con l'equazione di Schrödinger

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} f = \mathcal{H} f \, ,$$

ma in questa nota non ci occuperemo di questa questione. Vogliamo considerare il sistema fisico in un istante di tempo fissato.

Supponiamo di voler eseguire una misurazione sul sistema: di posizione, o di momento, o di energia... In questa teoria, ad ogni tipo di misurazione viene associato un operatore lineare autoaggiunto in H. Sia $L : D(L) \subseteq H \to H$ un tale operatore, e sia $\{P(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ la sua famiglia spettrale.

Fissiamo ora un intervallo $]\alpha, \beta]$. Lo scopo della nostra misurazione sarà di stabilire se il risultato sia o no in $]\alpha, \beta]$. In generale, pur non potendo prevederlo con sicurezza, la teoria stabilisce che la probabilità che il risultato della nostra misurazione sia in $]\alpha,\beta]$ è data da

$$\Pi = ||(P(\beta) - P(\alpha))f||^2 \ .$$

Si vede allora che questa probabilità è non nulla se e solo se $]\alpha,\beta] \cap \sigma(L) \neq \emptyset$.

Infine, una volta effettuata la misurazione, la teoria ci dice che il vettore di stato automaticamente cambia: se il risultato è stato effettivamente trovato in $]\alpha,\beta]$, il nuovo vettore di stato è

$$f' = \frac{(P(\beta) - P(\alpha))f}{||(P(\beta) - P(\alpha))f||} \ .$$

Si vede allora che, se ripetiamo subito dopo lo stesso tipo di misurazione, siccome $(P(\beta) - P(\alpha))^2 = P(\beta) - P(\alpha)$, il risultato si troverà con sicurezza ancora in $]\alpha,\beta]$. In altri termini, la probabilità di trovare il nuovo risultato in un intervallo disgiunto da $]\alpha,\beta]$ è nulla.

Esempio 1. L'operatore di posizione "x" è definito da

$$(Lf)(x) = xf(x) \ .$$

Si può vedere che $\sigma(L) = \mathbb{R}$ e

$$(P(\lambda)f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \leq \lambda \ , \\ 0 & \text{se } x > \lambda \ . \end{cases}$$

La probabilità di trovare il risultato in $]\alpha,\beta]$ è

$$\Pi = \int_\alpha^\beta |f(x)|^2 \, dx \ .$$

Dopo la misurazione, se il risultato è stato trovato in $]\alpha,\beta]$, il nuovo vettore di stato è

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{\sqrt{\int_\alpha^\beta |f(x)|^2 \, dx}} & \text{se } \alpha < x \leq \beta \,, \\ & \\ 0 & \text{altrimenti} \,. \end{cases}$$

Esempio 2. Supponiamo che $\hat{\lambda}_k$ sia un autovalore isolato di L, e che abbia molteplicità 1. Sia f_k sia un relativo autovettore normalizzato. Se prendo l'intervallo $]\alpha,\beta]$ in modo che l'unico elemento di $\sigma(L)$ in esso sia $\hat{\lambda}_k$, allora, essendo

$$(P(\beta) - P(\alpha))f = \langle f, f_k \rangle f_k \ ,$$

la probabilità che il risultato della nostra misurazione sia in $]\alpha, \beta]$ è

$$\Pi = |\langle f, f_k \rangle|^2 \ .$$

Una volta effettuata la misurazione, se il risultato è stato effettivamente trovato in $]\alpha, \beta]$, il nuovo vettore di stato sarà

$$f' = \frac{\langle f, f_k \rangle}{|\langle f, f_k \rangle|} f_k \ .$$

Se ora restringiamo l'intervallo e prendiamo un $]\alpha', \beta']$ con $\hat{\lambda}_k \in\ ]\alpha', \beta'] \subset\ ]\alpha, \beta]$, siccome l'unico elemento di $\sigma(L)$ in $]\alpha, \beta]$ è $\hat{\lambda}_k$, possiamo essere certi che il risultato di una nuova misurazione dello stesso tipo sarà in $]\alpha', \beta']$. Data l'arbitrarietà di questo intervallo, diremo allora che il risultato **è proprio** $\hat{\lambda}_k$.

Supponiamo ora di aver eseguito la prima misurazione con operatore associato L e di aver trovato il risultato in $]\alpha, \beta]$. Vogliamo eseguire subito dopo, "simultaneamente", un altro tipo di misurazione, alla quale è associato un operatore $\widetilde{L}$, con relativa famiglia spettrale $\{\widetilde{P}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Fissiamo quindi un altro intervallo $]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ e ci chiediamo se il risultato della nuova misurazione sia in $]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$. Se effettivamente il risultato ottenuto è in tale intervallo, il nuovo vettore di stato sarà

$$f'' = \frac{(\widetilde{P}(\beta) - \widetilde{P}(\alpha))f'}{||(\widetilde{P}(\beta) - \widetilde{P}(\alpha))f'||} = \frac{(\widetilde{P}(\tilde{\beta}) - \widetilde{P}(\tilde{\alpha}))(P(\beta) - P(\alpha))f}{||(\widetilde{P}(\tilde{\beta}) - \widetilde{P}(\tilde{\alpha}))(P(\beta) - P(\alpha))f||} \ .$$

Ci poniamo ora una domanda: se subito dopo questa seconda misurazione ripetiamo la misurazione fatta all'inizio, con operatore associato L, siamo ancora sicuri di trovare il risultato in $]\alpha, \beta]$?

La questione dipende in modo cruciale dal fatto che gli operatori $\widetilde{P}(\tilde{\beta}) - \widetilde{P}(\tilde{\alpha})$ e $P(\beta) - P(\alpha)$ commutino oppure no. Se commutano, siccome $(P(\beta) - P(\alpha))^2 = (P(\beta) - P(\alpha))$, la probabilità

$$\Pi'' = \left\| (P(\beta) - P(\alpha)) \frac{(\widetilde{P}(\tilde{\beta}) - \widetilde{P}(\tilde{\alpha}))(P(\beta) - P(\alpha))f}{||(\widetilde{P}(\tilde{\beta}) - \widetilde{P}(\tilde{\alpha}))(P(\beta) - P(\alpha))f||} \right\|^2$$

di trovare il nuovo risultato ancora in $]\alpha, \beta]$ è proprio 1. Altrimenti, questa probabilità, in genere, è minore di 1.

Esempio 3. L'operatore di posizione

$$(Lf)(x) = xf(x)$$

e l'operatore di momento

$$\widetilde{L} = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$$

hanno famiglie spettrali che non commutano. Questo fatto è all'origine del **principio di indeterminazione** di Heisenberg, secondo il quale non è possibile misurare "simultaneamente" posizione e momento con precisione grande quanto si vuole.

Referenze

[1] Gilbert Helmberg, Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space, Dover Publications, 2008.