Un'introduzione ai metodi variazionali

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. Alessandro Fonda

Università di Trieste, a.a. 2014/2015

1 Il metodo variazionale

In questa parte del corso introdurremo alcune tecniche variazionali, con lo scopo di ottenere ulteriori risultati di esistenza di soluzioni per il problema periodico

$$(P) \qquad \begin{cases} x'' + g(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,. \end{cases}$$

Essendo l'argomento molto vasto, ci accontenteremo di esporre solo alcuni risultati basilari.

1.1 Definizione del funzionale

Lavoreremo con lo spazio H^1_T delle funzioni $x \in W^{1,2}(0,T)$ tali che $x(0) = x(T)$, con prodotto scalare

$$\langle u, v\rangle = \int_0^T u(t)v(t)\,dt + \int_0^T u'(t)v'(t)\,dt\,,$$

e norma

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = (\|x\|_2^2 + \|x'\|_2^2)^{1/2}.$$

Si tratta di uno spazio di Hilbert. Consideriamo il problema periodico

$$(P) \qquad \begin{cases} x'' + g(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

dove $g : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Posto $G(t,x) = \int_0^x g(t,u)\,du$, sia $F : H^1_T \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$F(x) = \int_0^T \left[\tfrac{1}{2}\,x'(t)^2 - G(t,x(t))\right]\,dt\,.$$

Lemma 1 *Il funzionale F è di classe C^1 e per ogni $h \in H^1_T$ si ha*

$$F'(x)h = \int_0^T [x'(t)h'(t) - g(t, x(t))h(t)]\, dt\,.$$

Se $F'(x) = 0$, allora x è soluzione di (P).

<u>Dimostrazione</u>. Per $h \in H^1_T$ con $\|h\| = 1$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{F(x + \tau h) - F(x)}{\tau} &= \frac{1}{\tau}\bigg(\frac{1}{2}\int_0^T [(x'(t) + \tau h'(t))^2 - x'(t)^2]\, dt \\
&\qquad - \int_0^T [G(t, x(t) + \tau h(t)) - G(t, x(t))]\, dt\bigg) \\
&= \int_0^T x'(t)h'(t)\, dt + \tau \int_0^T h'(t)^2\, dt - \\
&\qquad - \int_0^T \frac{G(t, x(t) + \tau h(t)) - G(t, x(t))}{\tau}\, dt\,,
\end{aligned}$$

per ogni $\tau \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Per il Teorema di Lagrange, esiste un $\xi \in]0, \tau[$ per cui

$$\frac{G(t, x(t) + \tau h(t)) - G(t, x(t))}{\tau} = g(t, x(t) + \xi h(t))\, h(t)\,,$$

ed essendo tutte le funzioni coinvolte continue, si ha che

$$\sup\{|g(t, x(t) + \xi h(t))\, h(t)| : t \in [0, T],\ \xi \in] - 1, 1[\,\} < +\infty\,.$$

Pertanto, usando il teorema della convergenza dominata,

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{F(x + \tau h) - F(x)}{\tau} = \int_0^T x'(t)h'(t)\, dt - \int_0^T g(t, x(t))h(t)\, dt\,.$$

Vediamo così che F è quasi-differenziabile, con

$$\Psi_F(x)(h) = \int_0^T x'(t)h'(t)\, dt - \int_0^T g(t, x(t))h(t)\, dt\,.$$

Siccome $\Psi_F : H^1_T \to \mathcal{L}(H^1_T, \mathbb{R})$ è continua, la funzione F è di classe C^1.

Supponiamo ora che sia $F'(x) = 0$. Allora

$$\int_0^T x'(t)h'(t)\, dt = \int_0^T g(t, x(t))h(t)\, dt\,, \tag{1}$$

per ogni $h \in H^1_T$. Pertanto, ponendo $v(t) = -g(t, x(t))$, si ha che x' ha derivata debole $v \in C([0, T])$, quindi

$$x'(t) = x'(0) + \int_0^t v(s)\, ds = x'(0) - \int_0^t g(s, x(s))\, ds\,,$$

per ogni $t \in [0,T]$. Ne segue che x' è di classe C^1 e

$$x''(t) = -g(t, x(t)) \, ,$$

per ogni $t \in [0,T]$. Inoltre, prendendo la funzione costante $h(t) = 1$ in (1), si ha che $\int_0^T g(t,x(t))\, dt = 0$, da cui $x'(0) = x'(T)$. ■

Diremo che x è un **punto critico** di F se $F'(x) = 0$; in tal caso, $F(x)$ si dirà **valore critico** di F.

Lemma 2 *Il funzionale F è debolmente semi-continuo inferiormente: se $(x_n)_n$ è una successione che converge debolmente in H^1_T ad una funzione x, allora*

$$F(x) \leq \liminf_n F(x_n) \, .$$

<u>Dimostrazione</u>. Si ha $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$, con

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^T x'(t)^2, dt \, , \qquad F_2(x) = -\int_0^T G(t,x(t))\, dt \, .$$

Si può vedere facilmente che F_1è un funzionale convesso: se $x, y \in H$ e $\tau \in [0,1]$, allora

$$F_1(\tau x + (1-\tau)y) \leq \tau F_1(x) + (1-\tau) F_1(y) \, .$$

Pertanto, $\nabla F_1 : H \to H$ sarà monotono. Infatti, scrivendo (per $\tau \neq 0$) la precedente disuguaglianza nella forma

$$\frac{F_1(y + \tau(x-y)) - F_1(y)}{\tau} \leq F_1(x) - F_1(y) \, ,$$

passando la limite per $\tau \to 0$ abbiamo che

$$\langle \nabla F_1(y), x - y \rangle \leq F_1(x) - F_1(y) \, .$$

Simmetricamente, si può vedere che vale anche la

$$\langle \nabla F_1(x), y - x \rangle \leq F_1(y) - F_1(x) \, ,$$

per cui, sommando le due, otteniamo

$$\langle \nabla F_1(y) - \nabla F_1(x), y - x \rangle \geq 0 \, .$$

Sia $(x_n)_n$ tale che $x_n \rightharpoonup x$, debolmente in H^1_T. Usando la monotonia di ∇F_1, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
F_1(x_n) - F_1(x) &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} F_1(\tau x_n + (1-\tau)x)\, d\tau \\
&= \int_0^1 \langle \nabla F_1(\tau x_n + (1-\tau)x), x_n - x \rangle \, d\tau \\
&= \int_0^1 \langle \nabla F_1(\tau x_n + (1-\tau)x) - \nabla F_1(x), x_n - x \rangle \, d\tau + \int_0^1 \langle \nabla F_1(x), x_n - x \rangle \, d\tau \\
&\geq \int_0^1 \langle \nabla F_1(x), x_n - x \rangle \, d\tau \, ,
\end{aligned}$$

da cui

$$F_1(x_n) \geq F_1(x) + \langle \nabla F_1(x), x_n - x \rangle \,.$$

Allora,

$$\liminf_n F_1(x_n) \geq F_1(x) + \liminf_n \langle \nabla F_1(x), x_n - x \rangle = F_1(x)\,,$$

il che mostra che F_1 è debolmente semicontinuo.

D'altra parte, se $x_n \rightharpoonup x$ in H^1_T, allora $(x_n)_n$ converge a x uniformemente. Essendo G continua,

$$\lim_n \int_0^T G(t, x_n(t))\, dt = \int_0^T G(t, x(t))\, dt\,,$$

per cui anche $F_2(x) \leq \liminf_n F_2(x_n)$. Ne segue la tesi. ■

1.2 Minimizzazione

Teorema 1 *Supponiamo che g sia limitata: esiste un $C > 0$ per cui*

$$|g(t,x)| \leq C\,, \qquad \textit{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_0^T G(t,x)\, dt = -\infty\,, \tag{2}$$

allora (P) ha una soluzione.

Dimostrazione. Se x è una funzione di H^1_T, scriviamo $x = \bar{x} + \tilde{x}$, dove

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt$$

è la media di x. Allora

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2} \int_0^T x'(t)^2 dt - \int_0^T G(t, \bar{x})\, dt - \int_0^T [G(t, x(t)) - G(t, \bar{x})]\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T x'(t)^2 dt - \int_0^T G(t, \bar{x})\, dt - \int_0^T \int_{\bar{x}}^{x(t)} g(t,u)\, du\, dt \\
&\geq \frac{1}{2} \int_0^T x'(t)^2 dt - \int_0^T G(t, \bar{x})\, dt - C \int_0^T |\tilde{x}(t)|\, dt \\
&\geq \frac{1}{2} \int_0^T x'(t)^2 dt - \int_0^T G(t, \bar{x})\, dt - C\sqrt{T}\, \|\tilde{x}\|_2\,.
\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Wirtinger, si trovano due costanti positive c, c' per cui

$$F(x) \geq c\|\tilde{x}\|^2 - \int_0^T G(t,\bar{x})\,dt - c'\,.$$

Ne segue che F è coerciva:

$$\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = +\infty\,.$$

Sia $(x_n)_n$ una successione tale che $\lim_n F(x_n) = \inf F$. Essendo F coerciva, tale successione deve essere limitata. Pertanto, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che converge debolmente ad una certa x in H^1_T. Essendo F debolmente semi-continua inferiormente, si ha

$$F(x) \leq \liminf_k F(x_{n_k}) = \lim_n F(x_n) = \inf F\,,$$

per cui x è un punto di minimo per F. Quindi, $F'(x) = 0$, ossia x è soluzione di (P). ■

1.3 Il principio di Ekeland

Il risultato seguente è di importanza fondamentale.

Teorema 2 (Ekeland, 1974) *Supponiamo che M sia uno spazio metrico completo e che $\Phi : M \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua e limitata inferiormente. Per ogni $\varepsilon > 0$, se $u \in M$ è tale che*

$$\Phi(u) \leq \inf_M \Phi + \varepsilon\,,$$

esiste un $v \in M$ tale che $\Phi(v) \leq \Phi(u)$, $d(v,u) \leq \sqrt{\varepsilon}$ e

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \sqrt{\varepsilon}\,d(w,v)\,, \quad \text{per ogni } w \neq v\,.$$

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, definiamo la seguente relazione su M:

$$v_1 \preceq v_2 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(v_1) \leq \Phi(v_2) - \sqrt{\varepsilon}\,d(v_2,v_1)\,.$$

Si vede che è una relazione d'ordine:

$$\begin{aligned}
&v_1 \preceq v_1\,;\\
&[v_1 \preceq v_2 \text{ e } v_2 \preceq v_1] \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2\,;\\
&[v_1 \preceq v_2 \text{ e } v_2 \preceq v_3] \quad \Rightarrow \quad v_1 \preceq v_3\,.
\end{aligned}$$

Sia $u \in M$ fissato tale che $\Phi(u) \leq \inf_M \Phi + \varepsilon$. Definiamo per induzione la successione $(u_n)_n$ in questo modo: poniamo $u_0 = u$ e, una volta definito u_n, per un certo $n \in \mathbb{N}$, consideriamo l'insieme

$$S_n = \{w \in M : w \preceq u_n\} .$$

Tale S_n è non vuoto, in quanto $u_n \in S_n$. Scegliamo allora u_{n+1} in S_n tale che

$$\Phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1} .$$

La successione $(u_n)_n$ così costruita è decrescente per la relazione d'ordine sopra definita. Gli insiemi S_n sono chiusi e si ha:

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \ldots \supseteq S_n \supseteq S_{n+1} \supseteq \ldots$$

Vediamo che $\lim_n \operatorname{diam}(S_n) = 0$. Infatti, preso un $w \in S_{n+1}$, si ha $w \preceq u_{n+1} \preceq u_n$, per cui

$$\sqrt{\varepsilon}\, d(u_{n+1}, w) \leq \Phi(u_{n+1}) - \Phi(w) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1} - \Phi(w) \leq \frac{1}{n+1} ;$$

da ciò segue che

$$\operatorname{diam}(S_n) \leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}\,(n+1)} .$$

Essendo M completo, per quanto visto sopra c'è un unico elemento $v \in M$ che appartiene a tutti gli S_n. (Si osservi che $(u_n)_n$ è di Cauchy e $\lim_n u_n = v$.) Essendo $v \in S_0$, si ha che $v \preceq u$, ossia

$$\Phi(u) - \Phi(v) \geq \sqrt{\varepsilon}\, d(u, v) .$$

Ne segue che $\Phi(v) \leq \Phi(u)$; inoltre,

$$d(u, v) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\Phi(u) - \Phi(v)) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Big(\inf_M \Phi + \varepsilon - \Phi(v) \Big) \leq \sqrt{\varepsilon} .$$

Osserviamo ora che, se per un certo $w \in M$ si ha che $w \preceq v$, allora $w \preceq u_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi w appartiene a tutti gli S_n, per cui deve essere $w = v$.

Quindi, se $w \neq v$, non può essere $w \preceq v$, per cui deve essere

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \sqrt{\varepsilon}\, d(v, w) ,$$

e il teorema è dimostrato. ∎

1.4 La ricerca dei punti di sella

Sia H uno spazio di Hilbert e $F : H \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Sia $Y \subseteq H$ un sottospazio di dimensione finita. Usiamo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} B_R &= \{y \in Y : \|y\| < R\}, \\ \bar{B}_R &= \{y \in Y : \|y\| \le R\}, \\ S_R &= \{y \in Y : \|y\| = R\}. \end{aligned}$$

Definiamo inoltre l'insieme

$$M = \{u \in C(\bar{B}_R, H) : u_{|S_R} = id\},$$

che risulta uno spazio metrico completo, con la distanza usuale

$$d(u,v) = \max_{y \in \bar{B}_R} \|u(y) - v(y)\|.$$

Teorema 3 *Siano*

$$c = \inf_{u \in M} \max_{y \in \bar{B}_R} F(u(y)), \quad c' = \max_{y \in S_R} F(y).$$

Se $c' < c$, allora esiste una successione $(x_n)_n$ in H tale che

$$\lim_n F(x_n) = c, \qquad \lim_n F'(x_n) = 0.$$

Dimostrazione. Sia $\Phi : M \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\Phi(\gamma) = \max_{s \in \bar{B}_R} F(\gamma(s)).$$

Si vede che Φ è continua e limitata inferiormente:

$$\inf_M \Phi = c > c'.$$

Sia $\varepsilon \in]0, c - c'[$ e $u \in M$ tale che

$$\Phi(u) \le c + \varepsilon.$$

Per il principio di Ekeland, esiste una $v \in M$ tale che $\Phi(v) \le \Phi(u)$, $d(v,u) < \sqrt{\varepsilon}$ e

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \sqrt{\varepsilon}\, d(w,v), \quad \text{per ogni } w \ne v.$$

Dimostreremo ora che esiste un $\bar{s} \in \bar{B}_R$ tale che

$$c - \varepsilon \le F(v(\bar{s})) \le c + \varepsilon, \quad \|\nabla F(v(\bar{s}))\| \le \sqrt{\varepsilon},$$

da cui segue immediatamente la conclusione. Per assurdo, supponiamo che non sia così. Siccome sicuramente

$$F(v(s)) \leq \Phi(v) \leq \Phi(u) \leq c+\varepsilon\,,$$

per ogni $s \in \bar{B}_R$, scriviamo

$$S = \{s \in \bar{B}_R : F(v(s)) \geq c-\varepsilon\}$$

e supponiamo per assurdo che, per ogni $s \in S$, si abbia $\|\nabla F(v(s))\| > \sqrt{\varepsilon}$. (Si noti che $S \neq \emptyset$ perché $\Phi(v) \geq c$.) Allora, per ogni $s \in S$, esiste un $\nu_s \in H$ tale che $\|\nu_s\| = 1$ e

$$\langle \nabla F(v(s), \nu_s\rangle < -\sqrt{\varepsilon}\,;$$

per la continuità di ∇F, esistono $\delta_s > 0$ e $\rho_s > 0$ tali che

$$\langle \nabla F(v(y)+x), \nu_s\rangle < -\sqrt{\varepsilon}\,,$$

per ogni $y \in \bar{B}_R$ con $\|y-s\| \leq \rho_s$ e $x \in H$ con $\|x\| \leq \delta_s$. Essendo S compatto, esistono $s_1,\ldots,s_k$ in S per cui

$$S \subseteq B(s_1,\rho_{s_1}) \cup \ldots \cup B(s_k,\rho_{s_k})\,.$$

Sia $\{\psi_1,\ldots,\psi_k\}$ una partizione dell'unità associata a tale ricoprimento: le funzioni continue $\psi_j : \bar{B}_R \to \mathbb{R}$ soddisfano

(i) $0 \leq \psi_j(y) \leq 1$,

(ii) $\psi_j(y) = 0$ se $y \notin B(s_j,\rho_{s_j})$,

(iii) $\sum_{j=1}^k \psi_j(y) = 1$ per ogni $y \in S$.

Sia inoltre $\psi : \bar{B}_R \to \mathbb{R}$ la funzione continua così definita:

$$\psi(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } F(v(y)) \leq c-\varepsilon\,, \\ \dfrac{1}{\varepsilon}(F(v(y))-c+\varepsilon) & \text{se } c-\varepsilon \leq F(v(y)) \leq c\,, \\ 1 & \text{se } F(v(y)) \geq c\,. \end{cases}$$

Si noti che $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi_{|S_R} = 0$. Poniamo $\delta = \min\{\delta_{s_1},\ldots,\delta_{s_k}\}$ e definiamo

$$w(y) = v(y) + \delta\psi(y)\sum_{j=1}^k \psi_j(y)\nu_{s_j}\,.$$

Siccome ψ è nulla su S_R, si ha che $w_{|S_R} = v_{|S_R} = id$, per cui $w \in M$. Inoltre,

$$d(w,v) \leq \delta\,.$$

Sia $\bar{y} \in \bar{B}_R$ tale che $F(w(\bar{y})) = \Phi(w)$. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = F\Big(v(\bar{y}) + t\,\delta\psi(\bar{y}) \sum_{j=1}^{k} \psi_j(\bar{y})\nu_{s_j}\Big)\,.$$

Esiste un $\xi \in]0,1[$ tale che $f(1) = f(0) + f'(\xi)$, per cui

$$\begin{aligned} F(w(\bar{y})) &= F(v(\bar{y})) + \Big\langle \nabla F\Big(v(\bar{y}) + \xi\delta\psi(\bar{y}) \sum_{j=1}^{k} \psi_j(\bar{y})\nu_{s_j}\Big), \delta\psi(\bar{y}) \sum_{j=1}^{k} \psi_j(\bar{y})\nu_{s_j} \Big\rangle \\ &\le F(v(\bar{y})) - \sqrt{\varepsilon}\,\delta\psi(\bar{y})\,. \end{aligned}$$

In particolare, $F(v(\bar{y})) \ge F(w(\bar{y})) \ge c$, per cui $\psi(\bar{y}) = 1$ e quindi $w \ne v$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \Phi(w) &\le \Phi(v) - \sqrt{\varepsilon}\,\delta \\ &\le \Phi(v) - \sqrt{\varepsilon}\,d(w,v)\,, \end{aligned}$$

una contraddizione. ■

Diremo che F soddisfa la **condizione di Palais-Smale** se, presa una successione $(x_n)_n$ in H, se

$$(F(x_n))_n \text{ è limitata, e } \lim_n F'(x_n) = 0\,,$$

allora $(x_n)_n$ ha una sottosuccessione convergente.

Corollario 1 *Se, oltre alle ipotesi del teorema precedente, vale la condizione di Palais-Smale, allora esiste un $x \in H$ tale che $F(x) = c$ e $F'(x) = 0$.*

Dimostrazione. Il teorema fornisce una successione $(x_n)_n$ in H tale che

$$\lim_n F(x_n) = c\,, \qquad \lim_n F'(x_n) = 0\,.$$

Per la condizione di Palais-Smale, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ e un punto $x \in H$ tale che $\lim_k x_{n_k} = x$. Siccome F è di classe C^1, si ha

$$F(x) = \lim_k F(x_{n_k}) = c\,, \quad F'(x) = \lim_k F'(x_{n_k}) = 0\,.$$

■

Teorema 4 (Ambrosetti - Rabinowitz, 1973) *Siano x_0, x_1 due punti in H e Ω un intorno di x_0, che non contenga x_1, tale che*

$$\max\{F(x_0), F(x_1)\} < \inf_{s \in \partial\Omega} F(s)\,.$$

Sia
$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],H) : \gamma(0) = x_1\,, \gamma(1) = x_2\}$$
e
$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} F(\gamma(t))\,.$$
Allora esiste una successione $(x_n)_n$ *in* H *tale che*
$$\lim_n F(x_n) = c\,, \qquad \lim_n F'(x_n) = 0\,.$$
Se inoltre vale la condizione di Palais-Smale, allora esiste un $x \in H$ *tale che* $F(x) = c$ *e* $F'(x) = 0$.

Dimostrazione. Effettuando una traslazione in H, possiamo supporre che sia $x_0 = -x_1$. Consideriamo la retta passante per x_0 e x_1, cioè il sottospazio Y di dimensione 1 generato da x_0. Sia $R = \|x_0\|$, cosicché $\bar{B}_R$ è il segmento $[x_0, x_1]$ congiungente x_0 con x_1. Ogni $u \in M$ è una funzione continua da $[x_0, x_1]$ in H tale che $u(x_0) = x_0$ e $u(x_1) = x_1$. Ad essa corrisponde la curva $\gamma \in \Gamma$ definita da
$$\gamma(t) = u(x_0 + t(x_1 - x_0))\,.$$
Gli insiemi M e Γ sono pertanto in corrispondenza biunivoca. Ponendo
$$c' = \max\{F(x_0), F(x_1)\}\,,$$
dimostriamo che $c' < c$. Infatti, presa una curva $\gamma \in \Gamma$, essendo la sua immagine un insieme connesso, esiste un $\bar{t} \in \,]0,1[$ tale che $\gamma(\bar{t}) \in \partial\Omega$. Quindi,
$$\max_{t\in[0,1]} F(\gamma(t)) \geq \inf_{s\in\partial\Omega} F(s)\,,$$
per ogni $\gamma \in \Gamma$. Ne segue che
$$c \geq \inf_{s\in\partial\Omega} F(s)\,,$$
e la conclusione $c' < c$ segue dall'ipotesi. Possiamo quindi applicare il Teorema 3 e il Corollario 1. ■

Teorema 5 (Rabinowitz, 1978) *Sia* Y *un sottospazio di* H *avente dimensione finita tale che, se* $Z = Y^\perp$ *è il suo sottospazio ortogonale, si abbia*
$$\max_{y\in S_R} F(y) < \inf_{z\in Z} F(z)\,.$$
Sia
$$c = \inf_{u\in M} \max_{y\in\bar{B}_R} F(u(y))\,.$$
Allora esiste una successione $(x_n)_n$ *in* H *tale che*
$$\lim_n F(x_n) = c\,, \qquad \lim_n F'(x_n) = 0\,.$$
Se inoltre vale la condizione di Palais-Smale, allora esiste un $x \in H$ *tale che* $F(x) = c$ *e* $F'(x) = 0$.

Dimostrazione. Verifichiamo che $c' < c$, dove

$$c' = \max_{y \in S_R} F(y)\,.$$

Preso $u \in M$ e considerata la proiezione ortogonale P_Y sul sottospazio Y, abbiamo che $P_Y \circ u : \bar{B}_R \to Y$ è una funzione continua che coincide con l'identità sul bordo S_R. Pertanto, il grado topologico $d(P_Y \circ u, B_R)$ vale 1 e c'è almeno un punto $\bar{y} \in B_R$ in cui la funzione $P_Y \circ u$ si annulla, ossia $u(\bar{y}) \in Z$. Quindi,

$$\max_{y \in \bar{B}_R} F(u(y)) \geq \inf_{z \in Z} F(z)\,,$$

per ogni $u \in M$. Ne segue che

$$c \geq \inf_{z \in Z} F(z)\,,$$

e la conclusione $c' < c$ segue dall'ipotesi. Possiamo quindi applicare il Teorema 3 e il Corollario 1. ■

2 In risonanza

Torniamo a considerare il problema periodico

$$(P) \qquad \begin{cases} x'' + g(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

con $g : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Ricordiamo che $F : H^1_T \to \mathbb{R}$ è il funzionale definito da

$$F(x) = \int_0^T \left[\tfrac{1}{2}\, x'(t)^2 - G(t, x(t))\right] dt\,,$$

dove $G(t,x) = \int_0^x g(t,u)\,du$. Sarà utile il seguente risultato preliminare.

Lemma 3 *Se $(x_n)_n$ è una successione limitata in H^1_T tale che $F'(x_n) \to 0$, allora $(x_n)_n$ ha una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Essendo $(x_n)_n$ limitata, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che converge debolmente in H^1_T e uniformemente a una certa $x \in H^1_T$. Ne segue che

$$\lim_k \langle \nabla F(x_{n_k}) - \nabla F(x),\, x_{n_k} - x \rangle = 0\,,$$

ossia

$$\lim_k \int_0^T [(x'_{n_k}(t) - x'(t))^2 - (g(t, x_{n_k}(t)) - g(t, x(t)))(x_{n_k}(t) - x(t))]\,dt = 0\,.$$

Di conseguenza,

$$\lim_k \int_0^T [x'_{n_k}(t) - x'(t)]^2\,dt = 0\,,$$

per cui $x_{n_k} \to x$, fortemente in H^1_T. ■

Sia N un numero naturale, e sia $x \in H^1_T$. Usando le serie di Fourier

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\right),$$

possiamo scrivere

$$x = x^- + x^0 + x^+ ,$$

dove

$$x^-(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{if } N = 0\,, \\ \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\right), & \text{if } N \geq 1\,, \end{cases}$$

$$x^0(t) = \begin{cases} \dfrac{a_0}{2}\,, & \text{if } N = 0\,, \\ a_N \cos\left(\dfrac{2\pi N}{T} t\right) + b_N \sin\left(\dfrac{2\pi N}{T} t\right), & \text{if } N \geq 1\,, \end{cases}$$

$$x^+(t) \sim \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\right).$$

In questo modo, possiamo scomporre H^1_T come somma diretta:

$$H^1_T = H^- \oplus H^0 \oplus H^+ .$$

Nel caso $N = 0$, lo spazio H^- non compare, e sciviamo di solito $\bar{x}$ e $\tilde{x}$ invece di x^0 e x^+, rispettivamente. Quindi, in tal caso, $x(t) = \bar{x} + \tilde{x}(t)$, dove

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,dt\,, \qquad \tilde{x}(t) = x(t) - \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,dt\,.$$

Vediamo che $\bar{x}$ è la media di x, e $\tilde{x}(t)$ ha media nulla.

Saranno utili le seguenti disuguaglianze.

Proposizione 1 *Se N è un intero positivo e $x \in H^1_T$, allora*

$$\|(x^-)'\|_2 \leq \frac{2\pi(N-1)}{T} \|x^-\|_2\,, \qquad \frac{2\pi(N+1)}{T} \|x^+\|_2 \leq \|(x^+)'\|_2\,.$$

Inoltre, ricordando che $\tilde{x}$ ha media nulla,

$$\|\tilde{x}\|_2 \leq \frac{T}{2\pi}\, \|x'\|_2\,.$$

Quest'ultima è nota come **disuguaglianza di Wirtinger**.

Dimostrazione. Se N è positivo, abbiamo

$$
\begin{aligned}
(x^-)'(t) &= \sum_{k=1}^{N-1} \left(-\frac{2\pi k}{T} a_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + \frac{2\pi k}{T} b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right), \\
(x^+)'(t) &\sim \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(-\frac{2\pi k}{T} a_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + \frac{2\pi k}{T} b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right).
\end{aligned}
$$

Per l'identità di Parseval,

$$
\|x^-\|_2^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k^2 + b_k^2), \qquad \|x^+\|_2^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|(x^-)'\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2\pi k}{T}\right)^2 (a_k^2 + b_k^2) \le \left(\frac{2\pi(N-1)}{T}\right)^2 \sum_{k=1}^{N-1} (a_k^2 + b_k^2), \\
\|(x^+)'\|_2^2 &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{2\pi k}{T}\right)^2 (a_k^2 + b_k^2) \ge \left(\frac{2\pi(N+1)}{T}\right)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),
\end{aligned}
$$

da cui seguono le disuguaglianze cercate. Se $N = 0$, la stessa cosa resta vera per x^+ e, siccome in questo caso $\tilde{x} = x^+$ e $\tilde{x}' = x'$, otteniamo la disuguaglianza di Wirtinger. ■

2.1 Risonanza con il primo autovalore

Teorema 6 *Supponiamo che g sia limitata: esiste un $C > 0$ per cui*

$$
|g(t, x)| \le C, \qquad \textit{per ogni } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.
$$

Se inoltre

$$
\lim_{|x| \to \infty} \int_0^T G(t, x)\, dt = +\infty, \tag{3}
$$

allora (P) ha una soluzione.

Dimostrazione. Prendiamo x_0 e x_1 costanti, con $x_0 < 0 < x_1$. Dato $x \in H_T^1$, indichiamo come in precedenza con $\bar{x}$ la sua media:

$$
\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt
$$

Sia

$$
\Omega = \{x \in H_T^1 : \bar{x} < 0\}.
$$

Allora Ω è un intorno di x_0 e

$$\partial\Omega = \{x \in H^1_T : \bar{x} = 0\} .$$

Se $z \in \partial\Omega$, allora

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2}\int_0^T z'(t)^2 dt - \int_0^T G(t, z(t))\, dt \\ &= \frac{1}{2}\|z'\|_2^2 - \int_0^T \int_0^{z(t)} g(t,u)\, du\, dt \\ &\geq \frac{1}{2}\|z'\|_2^2 - C\int_0^T |z(t)|\, dt \\ &\geq \frac{1}{2}\|z'\|_2^2 - C\sqrt{T}\,\|z\|_2 . \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Wirtinger, si ha

$$F(z) \geq c'(\|z\|^2 - 1) ,$$

per una certa costante $c' > 0$. In particolare, si ha che

$$\inf_{z \in \partial\Omega} F(z) \geq -c'.$$

Prendendo x_0 e x_1 con valore assoluto sufficientemente grande, avremo che

$$F(x_0) = -\int_0^T G(t, x_0)\, dt < -c' , \qquad F(x_1) = -\int_0^T G(t, x_1)\, dt < -c' .$$

Dimostreremo ora che vale la condizione di Palais-Smale, per cui il Teorema 4 si applica. Sia $(x_n)_n$ una successione in H^1_T tale che $(F(x_n))_n$ è limitata e $F'(x_n) \to 0$. Per n sufficientemente grande, si ha

$$|\langle \nabla F(x_n), h\rangle| \leq \|h\| ,$$

per ogni $h \in H^1_T$. Quindi,

$$|\langle \nabla F(x_n), \tilde{x}_n\rangle| = \left| \int_0^T [x_n'(t)^2 - g(t, x_n(t))\tilde{x}_n(t)]\, dt \right| \leq \|\tilde{x}_n\| ,$$

da cui

$$\int_0^T x_n'(t)^2\, dt \leq \|\tilde{x}_n\| + C\sqrt{T}\,\|\tilde{x}_n\|_2 .$$

Usando la disuguaglianza di Wirtinger, ne segue che $(\tilde{x}_n)_n$ è limitata. D'altra parte,

$$\begin{aligned} \int_0^T G(t, \bar{x}_n)\, dt &= -F(x_n) + \frac{1}{2}\int_0^T x_n'(t)^2\, dt - \int_0^T \int_{\bar{x}_n}^{x_n(t)} g(t,u)\, du\, dt \\ &\leq |F(x_n)| + \frac{1}{2}\|\tilde{x}_n'\|_2^2 + C\sqrt{T}\,\|\tilde{x}_n\|_2 . \end{aligned}$$

Quindi anche $(\bar{x}_n)_n$ è limitata, per cui la successione $(x_n)_n$ è limitata. Per il Lemma 3, $(x_n)_n$ ha una sottosuccesione convergente. ■

Osservazione. Si noti che, nella dimostrazione del teorema precedente, avremmo anche potuto applicare il Teorema 5.

2.2 Risonanza con un autovalore successivo

Per un intero $N \geq 1$, sia $\lambda_N = (\frac{2\pi N}{T})^2$ il corrispondente autovalore. Consideriamo i sottospazi H^-, H^0 e H^+ come definiti in precedenza. Si noti che $H^0 = \ker(L - \lambda_N I)$ è costituito dalle funzioni del tipo

$$a_N \cos(\sqrt{\lambda_N} t) + b_N \sin(\sqrt{\lambda_N} t) \,.$$

Per ogni $x \in H$, scriveremo

$$x = x^- + x^0 + x^+ \,,$$

con $x^- \in H^-$, $x^0 \in H^0$ e $x^+ \in H^+$.

Nel seguito, $h(t,x)$ sarà una funzione continua. Useremo la notazione $H(t,x) = \int_0^x h(t,u)\, du$.

Teorema 7 (Ahmad - Lazer - Paul, 1976) *Supponiamo che sia*

$$g(t,x) = \lambda_N x + h(t,x) \,,$$

con $\lambda_N = \left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2$*, e che* h *sia limitata: esiste un* $C > 0$ *per cui*

$$|h(t,x)| \leq C \,, \qquad \textit{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \,.$$

Se inoltre, per $v \in \ker(L - \lambda_N I)$ *si ha*

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \int_0^T H(t, v(t))\, dt = +\infty \,,$$

allora (P) ha una soluzione.

Dimostrazione. Il funzionale risulta qui essere

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^T \left[\tfrac{1}{2}\left(x'(t)^2 - \lambda_N x(t)^2\right) - H(t,x(t))\right] dt \,, \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T [(x^-)'(t)^2 - \lambda_N x^-(t)^2]\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T [(x^+)'(t)^2 - \lambda_N x^+(t)^2]\, dt - \\ &\quad - \int_0^T H(t, x^-(t) + x^0(t) + x^+(t))\, dt \,, \end{aligned}$$

Dalle disuguaglianze della Proposizione 1, si vede che

$$\|(x^-)'\|_2^2 - \lambda_N \|x^-\|_2^2 \leq -\frac{\lambda_N - \lambda_{N-1}}{1 + \lambda_{N-1}} \|x^-\|^2 \,, \tag{4}$$

$$\|(x^+)'\|_2^2 - \lambda_N \|x^+\|_2^2 \geq \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{1 + \lambda_{N+1}} \|x^+\|^2 \,. \tag{5}$$

Poniamo $Y = H^- \oplus H^0$, $Z = H^+$. Essendo h limitata, si vede che, per $y = x^- + x^0 \in Y$,

$$\begin{aligned} F(x^- + x^0) &\leq -\frac{\lambda_N - \lambda_{N-1}}{1 + \lambda_{N-1}} \|x^-\|^2 + \int_0^T H(t, x^-(t) + x^0(t))\, dt \\ &\leq -\frac{\lambda_N - \lambda_{N-1}}{1 + \lambda_{N-1}} \|x^-\|^2 + \int_0^T H(t, x^0(t))\, dt + C\sqrt{T}\, \|x^-\|_2 \,, \end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{\|y\| \to \infty} F_{|Y}(y) = -\infty \,.$$

D'altra parte, per $z = x^+ \in Z$,

$$\begin{aligned} F(x^+) &\geq \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{1 + \lambda_{N+1}} \|x^+\|^2 + \int_0^T H(t, x^+(t))\, dt \\ &\geq \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{1 + \lambda_{N+1}} \|x^+\|^2 - C\sqrt{T}\, \|x^+\|_2 \\ &\geq c\|x^+\|^2 - c' \,, \end{aligned}$$

con opportune costanti positive c, c', da cui

$$\inf_Z F \geq -c' \,.$$

Quindi, se $R > 0$ è scelto sufficientemente grande, si ha che

$$\max_{S_R} F < \inf_Z F \,.$$

Dimostreremo infine che vale la condizione di Palais-Smale, per cui il Teorema 5 si applica, prendendo $R > 0$ sufficientemente grande. Sia $(x_n)_n$ una successione in H^1_T tale che $(F(x_n))_n$ e $F'(x_n) \to 0$. Per n sufficientemente grande, si ha

$$|\langle \nabla F(x_n) | w \rangle| \leq \|w\| \,,$$

per ogni $w \in H^1_T$. Quindi, prendendo $w = x_n^+ - x_n^-$,

$$\begin{aligned} |\langle \nabla F(x_n), x_n^+ - x_n^- \rangle| &= \Big| \int_0^T [((x_n^+)')^2 - \lambda_N (x_n^+)^2 - ((x_n^-)')^2 + \lambda_N (x_n^-)^2]\, dt + \\ &\qquad + \int_0^T h(t, x_n)(x_n^+ - x_n^-)]\, dt \Big| \\ &\leq \|x_n^+ - x_n^-\| \,. \end{aligned}$$

Usando le disuguaglianze (4), (5) e il fatto che h è limitata, si vede che sia $(x_n^+)_n$ che $(x_n^-)_n$ sono limitate. D'altra parte, essendo $(F(x_n))_n$ limitata, anche la successione

$$\Big(\int_0^T H(t, x_n^-(t) + x_n^0(t) + x_n^+(t))\,dt\Big)_n$$

è limitata. Scrivendo

$$\int_0^T H(t, x_n^-(t) + x_n^0(t) + x_n^+(t))\,dt = \int_0^T H(t, x_n^0(t))\,dt + \int_0^T \int_{x_n^0(t)}^{x_n(t)} h(t,u)\,du\,,$$

e usando di nuovo il fatto che h è limitata, si ha che anche la successione

$$\Big(\int_0^T H(t, x_n^0(t))\,dt\Big)_n$$

è limitata. Per l'ipotesi, deve essere $(x_n^0)_n$ limitata, per cui la successione $(x_n)_n$ è limitata. Per il Lemma 3, $(x_n)_n$ ha una sottosuccesione convergente. ■

In modo simmetrico, abbiamo anche il seguente.

Teorema 8 *Supponiamo che sia*

$$g(t,x) = \lambda_N x + h(t,x)\,,$$

con $\lambda_N = \left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2$, *e che* h *sia limitata: esiste un* $C > 0$ *per cui*

$$|h(t,x)| \le C\,, \qquad \textit{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre, per $v \in \ker(L - \lambda_N I)$ *si ha*

$$\lim_{\|v\|\to\infty} \int_0^T H(t, v(t))\,dt = -\infty\,,$$

allora (P) ha una soluzione.

2.3 Nonlinearità periodiche

Consideriamo il problema

$$(\widetilde{P}) \qquad \begin{cases} x'' + g(t,x) = e(t)\,, \\ x(0) = x(T)\,, \;\; x'(0) = x'(T)\,. \end{cases}$$

Come sempre, supponiamo che g ed e siano funzioni continue. Inoltre, posta $G(t,x) = \int_0^x g(t,u)\,du$, supponiamo che G sia periodica in x:

$$G(t, x + 2\pi) = G(t,x)\,, \qquad \text{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

In particolare, g e G sono funzioni limitate: esiste un $C > 0$ per cui

$$|g(t,x)| \le C\,, \quad |G(t,x)| \le C\,, \qquad \text{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Teorema 9 (Mawhin - Willem, 1984) *Supponiamo che*

$$G(t, x + 2\pi) = G(t, x)\,, \qquad \textit{per ogni } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre

$$\bar{e} := \frac{1}{T} \int_0^T e(t)\, dt = 0\,,$$

Allora $(\widetilde{P})$ ha almeno due soluzioni geometricamente distinte.

Dimostrazione. Il funzionale $F : H^1_T \to \mathbb{R}$ è definito da

$$F(x) = \int_0^T \left[\tfrac{1}{2}\, x'(t)^2 - G(t, x(t)) + e(t)x(t)\right]\, dt\,.$$

Esso è limitato inferiormente e tale che

$$F(x + 2\pi) = F(x)\,, \qquad \text{per ogni } x \in H^1_T\,.$$

Sia $(x_n)_n$ una successione in H^1_T tale che $F(x_n) \to \inf F$. Essendo $(F(x_n))_n$ limitata e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T x_n'(t)^2\, dt &\le F(x_n) + \int_0^T G(t, x_n(t))\, dt + \left| \int_0^T e(t)\tilde{x}_n(t)\, dt \right| \\ &\le F(x_n) + TC + \|e\|_2 \|\tilde{x}_n\|_2\,, \end{aligned}$$

si ha che $(\tilde{x}_n)_n$ è limitata. Possiamo ora definire una nuova successione $(y_n)_n$ in questo modo: $\tilde{y}_n = \tilde{x}_n$, $\bar{y}_n \in [0, 2\pi]$ e $\bar{y}_n - \bar{x}_n \in 2\pi\mathbb{Z}$. Pertanto, $F(y_n) = F(x_n) \to \inf F$ e $(y_n)_n$ è limitata. Usando il fatto che F è debolmente semicontinua inferiormente se ne deduce, come nella dimostrazione del Teorema 1, che esiste un $x \in H^1_T$ tale che $F(x) = \inf F$. Quindi x è un punto di minimo e $F'(x) = 0$.

Se x non è un punto di minimo isolato, ci sono infiniti punti di minimo vicini a x. In questo caso, ci sono infiniti punti critici che non differiscono da x di un multiplo di 2π.

Se invece x è un punto di minimo isolato, esiste un $r \in]0, 2\pi[$ tale che

$$F(u) > \min F\,, \qquad \text{per ogni } u \in \overline{B}(x, r) \setminus \{x\}\,.$$

Dimostriamo che

$$\inf_{\partial B(x,r)} F > \min F\,.$$

Per assurdo, supponiamo esista una successione $(x_n)_n$ in $\partial B(x, r)$ tale che $F(x_n) \le \min F + \frac{1}{n}$. Usando il principio di Ekeland, con $\varepsilon = \frac{1}{n}$, è possibile trovare una successione $(y_n)_n$ in H^1_T tale che $F(y_n) \leq F(x_n)$, $\|y_n - x_n\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ e, per ogni $w \neq x_n$,

$$F(w) > F(y_n) - \frac{1}{\sqrt{n}} \|w - y_n\| \,.$$

Essendo F differenziabile, esiste un $\delta_n > 0$ tale che, se $h \in B(0, \delta_n)$,

$$|F(y_n + h) - F(y_n) - F'(y_n)h| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|h\| \,.$$

Prendendo $w = y_n + h$, ne segue che, per ogni $h \in B(0, \delta_n)$,

$$F'(y_n)h \geq F(y_n + h) - F(y_n) - \frac{1}{\sqrt{n}} \|h\| \geq -\frac{2}{\sqrt{n}} \|h\| \,,$$

il che implica che $\|F'(y_n)\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$. Abbiamo così una successione limitata $(y_n)_n$ tale che $F(y_n) \to \min F$ e $F'(y_n) \to 0$. Per il Lemma 3, esiste una sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ che converge ad un certo $y \in H^1_T$. Da quanto sopra, $y \in \partial B(x, r)$ e $F(y) = \min F$, una contraddizione.

Prendendo $\Omega = B(x, r)$, $x_0 = x$ e $x_1 = x + 2\pi$, si ha che

$$F(x_0) = F(x_1) < \inf_{s \in \partial\Omega} F(s) \,,$$

per cui si applica il Teorema 4. Posto

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = x_1 \,, \gamma(1) = x_2\}$$

e

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} F(\gamma(t)) \,,$$

esiste una successione $(x_n)_n$ in H^1_T tale che

$$\lim_n F(x_n) = c \,, \qquad \lim_n F'(x_n) = 0 \,.$$

Procedendo come nella prima parte della dimostrazione, si vede che $(\tilde{x}_n)_n$ è limitata e possiamo definire una nuova successione $(y_n)_n$ limitata tale che $F(y_n) = F(x_n) \to c$, $F'(y_n) = F'(x_n) \to 0$. Usando di nuovo il Lemma 3, si vede che esiste una sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ che converge ad un certo $y \in H^1_T$. Da quanto sopra, $F(y) = c$, e $F'(y) = 0$. Come dimostrato per il Teorema 4, $F(y) = c > F(x)$, per cui sicuramente F ha almeno due punti critici, x e y, che non differiscono tra loro di un multiplo di 2π. ■

Corollario 2 *Il pendolo forzato*

$$x'' + a\,\sin x = e(t)\,,$$

con $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua e* T*-periodica, tale che*

$$\bar{e} = \frac{1}{T} \int_0^T e(t)\,dt = 0\,,$$

ha almeno due soluzioni T*-periodiche geometricamente distinte.*

Dimostrazione. Essendo $g(x) = a \sin x$, abbiamo che $G(x) = a(1 - \cos x)$, e possiamo applicare il teorema precedente. ■

3 La teoria di Lusternik–Schnirelmann

Abbiamo visto che il funzionale associato a un pendolo forzato, con termine forzante a media nulla, è 2π-periodico. Più precisamente, questo accade qualora si consideri il problema $(\widetilde{P})$, assumendo che la funzione $G(t,x) = \int_0^x g(t,u)\,du$ sia 2π-periodica in x e la funzione $e(t)$ abbia media nulla.

Una situazione analoga si ritrova studiando il problema periodico associato a un sistema diferenziale, del tipo

$$(\widetilde{P}_N) \qquad \begin{cases} x'' + \nabla G(t, x(t)) = e(t)\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,. \end{cases}$$

Qui $G : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è continua, con gradiente rispetto alla seconda variabile ∇G continuo, mentre $e : [0,T] \to \mathbb{R}^N$ è continua. Si può facilmente verificare che, denotando sempre con H^1_T l'analogo spazio di Sobolev delle funzioni a valori in $\mathbb{R}^N$, le soluzioni di $(\widetilde{P}_N)$ corrispondono ai punti critici del funzionale $F : H^1_T \to \mathbb{R}$ definito da

$$F(x) = \int_0^T \left[\tfrac{1}{2}\, \|x'(t)\|^2 - G(t, x(t)) + \langle e(t), x(t) \rangle \right] \, dt\,.$$

Il nostro obiettivo sarà dimostrare il seguente

Teorema 10 *Se la funzione* $G(t,x) = G(t, x_1, \dots, x_N)$ *è* 2π*-periodica in ciascuna delle variabili* $x_1, \dots, x_N$*, e inoltre*

$$\bar{e} := \frac{1}{T} \int_0^T e(t)\,dt = 0\,,$$

allora $(\widetilde{P}_N)$ *ha almeno* $N + 1$ *soluzioni geometricamente distinte.*

In questo caso, due soluzioni sono geometricamente distinte se non possono essere ottenute l'una dall'altra semplicemente aggiungendo multipli interi di 2π alle loro componenti.

Ricordiamo che ogni $x \in H^1_T$ si può scrivere come $x(t) = \bar{x} + \tilde{x}(t)$, dove $\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \in \mathbb{R}^N$, per cui $H^1_T = \mathbb{R}^N \oplus \widetilde{H}$, dove $\widetilde{H}$ è il sottospazio di H^1_T costituito dalle funzioni a media nulla. Ecco che, sfruttando la periodicità nelle variabili $x_1, \dots, x_N$, possiamo definire un nuovo funzionale $\widehat{F} : \mathbb{T}^N \times \widetilde{H} \to \mathbb{R}$, dove $\mathbb{T}^N = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^N$ è il toro N-dimensionale, ponendo

$$\widehat{F}(\theta, \tilde{x}) = \int_0^T [\tfrac{1}{2}\|\tilde{x}'(t)\|^2 - G(t, \theta + \tilde{x}(t)) + \langle e(t), \tilde{x}(t)\rangle]\,dt\,.$$

Come spiegheremo in Appendice, i punti critici di $\widehat{F}$ corrispondono alle soluzioni di $(\widetilde{P}_N)$. Vedremo infatti che un certo $x = \bar{x} + \tilde{x} \in H^1_T$ è punto critico di F se e solo se $\theta + \tilde{x} \in \mathbb{T}^N \times \widetilde{H}$ è punto critico di $\widehat{F}$, dove

$$\theta \equiv \bar{x} \mod 2\pi\,.$$

Qui e nel seguito, scriveremo $\bar{x} \equiv \theta \mod 2\pi$ qualora $\bar{x} - \theta \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^N$. Per semplicare la notazione, visto lo stretto legame che corre tra i due funzionali, in seguito scriveremo semplicemente F invece di $\widehat{F}$.

Osserviamo che, similmente a quanto accade visto per l'equazione scalare, usando la disuguaglianza di Wirtinger si dimostra che F è limitato inferiormente.

Definiamo ora la *categoria di Lusternik–Schnirelmann.* In uno spazio topologico $\mathcal{M}$, la categoria di un insieme A in $\mathcal{M}$ è il minimo numero di insiemi chiusi e contraibili necessari a ricoprire A. Essa si denota con $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A)$. Se non è possibile trovare un numero finito di tali insiemi, si pone $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A) = +\infty$, mentre si conviene che $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$. Useremo la notazione $\mathrm{cat}(\mathcal{M})$ per indicare $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$.

Ricordiamo qui che una *deformazione* di A in $\mathcal{M}$ è una funzione continua $h : [0,1] \times A \to \mathcal{M}$ tale che $h(0,p) = p$ per ogni $p \in A$. L'insieme A è *contraibile* se esiste una sua deformazione h e un punto $\bar{p} \in \mathcal{M}$ per cui $h(1, A) = \{\bar{p}\}$.

Vediamo alcune proprietà della categoria.

- Se $\mathcal{M}$ è uno spazio vettoriale, esso è contraibile, per cui $\mathrm{cat}(\mathcal{M}) = 1$ (lo si vede, ad esempio, prendendo $h(x,t) = (1-t)x$ e $\bar{p} = 0$). Pertanto, per ogni sottoinsieme non vuoto A di $\mathcal{M}$, si ha che $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A) = 1$.

- Se V è uno spazio vettoriale e $\mathcal{M} = \mathcal{N} \times V$, allora $\mathrm{cat}(\mathcal{M}) = \mathrm{cat}(\mathcal{N})$.

- Se $\mathcal{M} = S^1$, esso non è contraibile (lo si dimostra per assurdo, usando il grado topologico), ma si può ricoprire con due archi chiusi contraibili, leggermente sovrapposti. Pertanto, $\mathrm{cat}(S^1) = 2$.

- È possibile dimostrare che $\mathrm{cat}(\mathbb{T}^N) = N + 1$ (dimostrazione non facile). Quindi, anche
$$\mathrm{cat}(\mathbb{T}^N \times \widetilde{H}) = N + 1\,.$$

- Se $A \subseteq B$, allora $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A) \leq \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(B)$.
- $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A \cup B) \leq \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A) + \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(B)$.
- Se $h : [0,1] \times A \to \mathcal{M}$ è una deformazione di A in $\mathcal{M}$, allora $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(h(A,1)) \geq \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A)$.
- Se A è compatto, esiste un intorno aperto U di A per cui

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(U) = \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A).$$

Da ora in poi sarà sempre $\mathcal{M} = \mathbb{T}^N \times \widetilde{H}$, e supporremo per semplicità che $\widehat{F} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ sia di classe C^2. Useremo le seguenti notazioni:

$$K = \{p \in \mathcal{M} : \nabla F(p) = 0\},$$

e, per ogni $c \in \mathbb{R}$,

$$K_c = \{p \in K : F(p) = c\}, \quad F^c = \{p \in \mathcal{M} : F(p) \leq c\}.$$

Inoltre, se $p = (\theta, \tilde{x}) \in \mathcal{M}$, scriveremo $T_p(\mathcal{M}) = T_\theta(\mathbb{T}^N) \times \widetilde{H}$. Come in precedenza, diremo che vale la condizione di Palais–Smale, in breve (P–S), se ogni successione $(p_n)_n$ per cui $(F(p_n))_n$ sia limitata e $\lim_n \nabla F(p_n) = 0$ possiede una sottosuccessione convergente.

Lemma 4 *Se vale (P–S) e $K_c = \emptyset$, allora, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, $F^{c+\varepsilon}$ può essere deformato in $F^{c-\varepsilon}$.*

Dimostrazione. Siccome vale (P–S), esiste un $\varepsilon > 0$ tale che, se $|F(p) - c| \leq \varepsilon$, allora $\|\nabla F(p)\| \geq 2\sqrt{\varepsilon}$. Prendiamo una funzione $\alpha : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, di classe C^∞, tale che
$\alpha(t) = 1$ se $t \in [0,1]$,
$\alpha(t) = 2/t^2$ se $t \geq 2$,
$\beta(t) := t^2\alpha(t)$ è crescente.

Definiamo, per $p \in \mathcal{M}$,

$$V(p) = -\alpha(\|\nabla F(p)\|)\nabla F(p) \in T_p(\mathcal{M}),$$

e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = V(x), \\ x(0) = p. \end{cases}$$

La soluzione $x(t)$ è unica, e si vede che è definita su tutto $\mathbb{R}$: sarà utile denotarla con $\eta_t(p)$ (è il cosiddetto *flusso* associato a V). Definiamo la deformazione $h : [0,1] \times F^{c+\varepsilon} \to \mathcal{M}$ ponendo $h(t,p) = \eta_t(p)$. Si ha che

$$\begin{aligned} F(\eta_t(p)) - F(p) &= \int_0^t \frac{d}{ds} F(\eta_s(p))\, ds \\ &= -\int_0^t \alpha(\|\nabla F(\eta_s(p))\|)\|\nabla F(\eta_s(p))\|^2 ds\,. \end{aligned}$$

Quindi, $F(\eta_t(p)) \leq F(p)$, per ogni $t \geq 0$, il che implica che $h(1, F^{c-\varepsilon}) \subseteq F^{c-\varepsilon}$. D'altra parte, se $p \in F^{c+\varepsilon} \setminus F^{c-\varepsilon}$, ricordando che $\beta(t) = t^2\alpha(t)$ è crescente,

$$F(\eta_1(p)) - F(p) \leq -\int_0^1 \alpha(\sqrt{2\varepsilon})\,(\sqrt{2\varepsilon})^2 dt = -2\varepsilon\,,$$

quindi

$$F(\eta_1(p)) \leq F(p) - 2\varepsilon \leq c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon\,,$$

da cui $h(1, F^{c+\varepsilon} \setminus F^{c-\varepsilon}) \subseteq F^{c-\varepsilon}$. In conclusione, abbiamo che $h(1, F^{c+\varepsilon}) \subseteq F^{c-\varepsilon}$, il che completa la dimostrazione. ∎

Introduciamo ora i livelli

$$c_k = \inf_{A \in \Gamma_k} \sup_{p \in A} F(p)\,, \quad k = 1, \ldots, N+1\,,$$

dove

$$\Gamma_k = \{A \subseteq \mathcal{M} : \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A) \geq k\}\,.$$

Notiamo che

$$-\infty < c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{N+1} \leq +\infty\,.$$

La dimostrazione sarà portata a termine per mezzo dei seguenti tre lemmi.

Lemma 5 *Se $c_k \in \mathbb{R}$, allora $K_{c_k} \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Se fosse $K_{c_k} = \emptyset$, per il Lemma 4 potrei trovare un $\varepsilon > 0$ e una deformazione $h : [0,1] \times F^{c_k+\varepsilon} \to \mathcal{M}$, con $h(1, F^{c_k+\varepsilon}) \subseteq F^{c_k-\varepsilon}$. Prendiamo un $A \in \Gamma_k$ tale che $\sup_{p\in A} F(p) \leq c_k + \varepsilon$, ossia $A \subseteq F^{c_k+\varepsilon}$. Allora

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(h(1,A)) \geq \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A) \geq k\,,$$

per cui $h(1,A) \in \Gamma_k$, ma anche $h(1,A) \subseteq F^{c_k-\varepsilon}$, il che porta a una contraddizione con la definizione di c_k. ∎

Lemma 6 *Se $c_k = c_{k+1} = \ldots = c_{k+j} \in \mathbb{R}$, allora $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(K_{c_k}) \geq j+1$. Ne segue che K_{c_k} ha almeno $j+1$ elementi.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che sia $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(K_{c_k}) \leq j$. Siccome vale (P–S), l'insieme K_{c_k} è compatto. Sappiamo allora che esiste un intorno aperto U di K_{c_k} tale che $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(U) = \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(K_{c_k}) \leq j$. Sia $\eta_t(p)$ il flusso definito nella dimostrazione del Lemma 4, e prendiamo l'insieme

$$N_\varepsilon = \left\{ p \in \mathcal{M} : |F(p) - c_k| < \varepsilon \,, \text{ e } \inf_{t \in [0,1]} \|\nabla F(\eta_t(p)\| < \sqrt{2\varepsilon} \right\} .$$

Si tratta di un intorno aperto di K_{c_k} e, se ε è sufficientemente piccolo, si ha che $N_\varepsilon \subseteq U$, per cui $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(N_\varepsilon) = \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(K_{c_k}) \leq j$.

Per la definizione di c_{k+j}, esiste un $A \in \Gamma_{k+j}$ per cui $\sup_{p \in A} F(p) \leq c_{k+j} + \varepsilon$, il che significa, essendo $c_{k+j} = c_k$, che $A \subseteq F^{c_k+\varepsilon}$. Sia $A_0 = A \setminus N_\varepsilon$. Siccome $\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A) \leq \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A_0) + \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(N_\varepsilon)$, abbiamo che

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A_0) \geq \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A) - \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(N_\varepsilon) \geq k + j - j = k \,,$$

per cui $A_0 \in \Gamma_k$. D'altra parte, se $p \in A_0$ è tale che $|F(p) - c_k| \leq \varepsilon$, allora $\|\nabla F(p)\| \geq 2\sqrt{\varepsilon}$. Pertanto, si può adattare la dimostrazione del Lemma 4 e trovare una deformazione $h : [0,1] \times A_0 \to \mathcal{M}$ tale che $h(1, A_0) \subseteq F^{c_k - \varepsilon}$. Ma

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(h(1, A_0)) \geq \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(A_0) \geq k \,,$$

per cui $h(1, A_0) \in \Gamma_k$, e si trova una contraddizione con la definizione di c_k. ■

Lemma 7 *Se $c_{N+1} = +\infty$, allora $F(K)$ non è limitato superiormente. Ne segue che K ha infiniti elementi.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $F(K)$ sia limitato superiormente, ossia che esista un $L \in \mathbb{R}$ tale che $F(p) < L$ per ogni $p \in K$. Costruiremo una deformazione $h : [0,1] \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ tale che $h(1, \mathcal{M}) \subseteq F^{L+1}$.

Definiamo, per $p \in \mathcal{M} \setminus K$,

$$W(p) = -\frac{\nabla F(p)}{\|\nabla F(p)\|^2} \in T_p(\mathcal{M}) \,,$$

e consideriamo $\tilde{\eta}_t(p)$, il flusso associato a W, definito per t in un intervallo massimale $]t^-(p), t^+(p)[$. Notiamo che, per ogni $t \in]t^-(p), t^+(p)[$,

$$\frac{d}{dt} F(\tilde{\eta}_t(p)) = -\langle \nabla F(\tilde{\eta}_t(p)), \frac{d}{dt}\tilde{\eta}_t(p) \rangle = -\langle \nabla F(\tilde{\eta}_t(p)), W(\tilde{\eta}_t(p)) \rangle = -1 \,.$$

Quindi, $F(\tilde{\eta}_t(p)) = F(p) - t$, con $t \in]t^-(p), t^+(p)[$. Vediamo dunque che, per $p \in \mathcal{M} \setminus K$, abbiamo due alternative: o $t^+(p) = +\infty$, oppure $t^+(p) < +\infty$, nel qual caso il flusso deve avvicinarsi a K, nel senso che esiste una successione $(t_n)_n$ tale che $\lim_n t_n = t^+(p)$ e $\lim_n \tilde{\eta}_{t_n}(p) = \bar{p}$, per un certo $\bar{p} \in K$. Possiamo allora essere certi che, per ogni $q \in \mathcal{M} \setminus F^L$, esiste un unico $t_q \in]0, t^+(q)[$ per cui $F(\tilde{\eta}_{t_q}(q)) = L$. Inoltre, la funzione che a q associa t_q risulta essere continua. Possiamo allora definire la funzione $h : [0,1] \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ in questo modo:

$$h(\sigma, q) = \begin{cases} q\,, & \text{se } F(q) \leq L\,, \\ \tilde{\eta}_{\sigma t_q (F(q)-L)}(q)\,, & \text{se } L < F(q) < L+1\,, \\ \tilde{\eta}_{\sigma t_q}(q)\,, & \text{se } F(q) \geq L+1\,. \end{cases}$$

Essa risulta essere una deformazione, e si ha che $h(1, \mathcal{M}) \subseteq F^{L+1}$. Ecco allora che

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(F^{L+1}) \geq \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(h(1, \mathcal{M})) \geq \mathrm{cat}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}) = N+1\,,$$

per cui $F^{L+1} \in \Gamma_{N+1}$, e dunque $c_{N+1} \leq L+1$, in contraddizione con l'ipotesi.

$\blacksquare$

Concludiamo dunque con il seguente enunciato.

Teorema 11 *Se $F : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ è un funzionale di classe C^2 limitato inferiormente, dove $\mathcal{M} = \mathbb{T}^N \times \widetilde{H}$, e inoltre vale (P–S), allora F ha almeno* $\mathrm{cat}(\mathcal{M}) = N+1$ *punti critici.*

4 Appendice

In questa appendice cercheremo di spiegare brevemente i concetti usati nella Sezione 3, riguardanti la varietà $\mathcal{M} = \mathbb{T}^N \times \widetilde{H}$.

4.1 Punti critici di funzionali

Innanzitutto alcune considerazioni sul toro $\mathbb{T}^N$: lo penseremo come $S^1 \times \ldots \times S^1$ (N volte), dove $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ è la circonferenza unitaria in $\mathbb{R}^2$. Usando la notazione complessa, quindi, ogni punto θ di $\mathbb{T}^N$ si può scrivere come

$$\theta = (e^{i\vartheta_1}, \ldots, e^{i\vartheta_N})\,.$$

In tale punto è definito lo "spazio tangente"

$$T_\theta(\mathbb{T}^N) = \{(\lambda_1 i e^{i\vartheta_1}, \ldots, \lambda_N i e^{i\vartheta_N}) : (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N\}\,,$$

un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{2N}$, e abbiamo un isomorfismo $\varphi_\theta : \mathbb{R}^N \to T_\theta(\mathbb{T}^N)$ definito da

$$\varphi_\theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = (\lambda_1 i e^{i\vartheta_1}, \ldots, \lambda_N i e^{i\vartheta_N})\,.$$

Fissato un punto $\theta_0 = (e^{i\vartheta_1^0}, \ldots, e^{i\vartheta_N^0}) \in \mathbb{T}^N$, sarà utile considerare la proiezione $P_{\theta_0} : \mathbb{T}^N \to \mathbb{T}_{\theta_0}(\mathbb{T}^N)$, definita da

$$P_{\theta_0}(\theta) = (\langle e^{i\vartheta_1} - e^{i\vartheta_1^0}, i e^{i\vartheta_1^0}\rangle i e^{i\vartheta_1^0}, \ldots, \langle e^{i\vartheta_N} - e^{i\vartheta_N^0}, i e^{i\vartheta_N^0}\rangle i e^{i\vartheta_N^0})\,.$$

Abbiamo ora a che fare con un funzionale $F : H^1_T \to \mathbb{R}$, dove gli elementi di H^1_T sono funzioni a valori vettoriali $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$. Consideriamo il caso in cui F sia 2π-periodico in ciascuna delle variabili x_j, con $j = 1, \dots, N$:

$$F(x_1, \dots, x_j + 2\pi, \dots, x_N) = F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)\,.$$

Ricordando che ogni $x \in H^1_T$ si può scrivere come $x(t) = \bar{x} + \tilde{x}(t)$, dove $\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \in \mathbb{R}^N$, abbiamo definito il funzionale $\widehat{F} : \mathbb{T}^N \times \widetilde{H} \to \mathbb{R}$, in questo modo:

$$\widehat{F}(\theta, \tilde{x}) = F(\bar{x} + \tilde{x})\,, \text{ con } \bar{x} \equiv \theta \bmod 2\pi\,.$$

Un tale funzionale si dice essere *differenziabile* in un punto $(\theta_0, \tilde{x}_0) \in \mathbb{T}^N \times \widetilde{H}$ se esiste un'applicazione lineare limitata $\ell : T_{\theta_0}(\mathbb{T}^N) \times \widetilde{H} \to \mathbb{R}$ per cui si possa scrivere

$$F(\theta, \tilde{x}) = F(\theta_0, \tilde{x}_0) + \ell(P_{\theta_0}(\theta), \tilde{x} - \tilde{x}_0) + r(\theta, \tilde{x})\,,$$

con

$$\lim_{(\theta,\tilde{x})\to(\theta_0,\tilde{x}_0)} \frac{r(\theta, \tilde{x})}{\|\theta - \theta_0\| + \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\|} = 0\,.$$

In tal caso, ℓ è il *differenziale* di $\widehat{F}$ in $(\theta_0, \tilde{x}_0)$ e si scrive $\ell = \widehat{F}'(\theta_0, \tilde{x}_0)$.

Si può dimostrare il seguente

Teorema 12 *Il funzionale $\widehat{F}$ è differenziabile in $(\theta_0, \tilde{x}_0)$ se e solo se F è differenziabile in $\bar{x}_0 + \tilde{x}_0$, ogni qualvolta $\bar{x}_0 \equiv \theta_0$ mod 2π, e in tal caso, scrivendo $\theta_0 = (e^{i\vartheta^0_1}, \dots, e^{i\vartheta^0_N}) \in \mathbb{T}^N$, si ha*

$$\widehat{F}'(\theta_0, \tilde{x}_0)((\lambda_1 i e^{i\vartheta^0_1}, \dots, \lambda_N i e^{i\vartheta^0_N}), \tilde{h}) = F'(\bar{x}_0 + \tilde{x}_0)((\lambda_1, \dots, \lambda_N) + \tilde{h})\,,$$

per ogni $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ e $\tilde{h} \in \widetilde{H}$.

Notiamo che, per ogni $\theta = (e^{i\vartheta_1}, \dots, e^{i\vartheta_N})$, è definito un prodotto scalare su $T_\theta(\mathbb{T}^N)$:

$$\langle (\lambda_1 e^{i\vartheta_1}, \dots, \lambda_N e^{i\vartheta_N}), (\lambda'_1 e^{i\vartheta_1}, \dots, \lambda'_N e^{i\vartheta_N}) \rangle = \lambda_1\lambda'_1 + \ldots + \lambda_N\lambda'_N\,.$$

Possiamo pertanto definire un prodotto scalare anche su $T_\theta(\mathbb{T}^N) \times \widetilde{H}$, che risulta così uno spazio di Hilbert. Se $\widehat{F}$ è differenziabile in $(\theta_0, \tilde{x}_0)$, per il teorema di Riesz si può definire il *gradiente* di $\widehat{F}$ in $(\theta_0, \tilde{x}_0)$ come quel vettore $\nabla\widehat{F}(\theta_0, \tilde{x}_0) \in T_{\theta_0}(\mathbb{T}^N) \times \widetilde{H}$ per cui si ha

$$\langle \nabla\widehat{F}(\theta_0, \tilde{x}_0), ((\lambda_1 e^{i\vartheta^0_1}, \dots, \lambda_N e^{i\vartheta^0_N}), \tilde{x}) \rangle = \widehat{F}'(\theta_0, \tilde{x}_0)((\lambda_1 e^{i\vartheta^0_1}, \dots, \lambda_N e^{i\vartheta^0_N}), \tilde{x})\,,$$

per ogni $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ e $\tilde{x} \in \widetilde{H}$. Da quanto sopra, se $\bar{x}_0 \equiv \theta_0$ mod 2π, si ha che

$$\langle \nabla\widehat{F}(\theta_0, \tilde{x}_0), ((\lambda_1 e^{i\vartheta^0_1}, \dots, \lambda_N e^{i\vartheta^0_N}), \tilde{x}) \rangle = \langle \nabla F(\bar{x}_0 + \tilde{x}_0), ((\lambda_1, \dots, \lambda_N) + \tilde{x}) \rangle\,,$$

per ogni $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ e $\tilde{h} \in \widetilde{H}$.

Diremo che $\widehat{F}$ è di classe C^1 se è differenziabile in tutti i punti del suo dominio, e la funzione $\nabla\widehat{F} : \mathbb{T}^N \times \widetilde{H} \to \mathbb{R}^{2N}$ è continua. Questa funzione risulta avere $2N$ componenti reali. Se ciascuna di queste componenti è di classe C^1, diremo che $\widehat{F}$ è di classe C^2. Si vede in modo naturale che $\widehat{F}$ è di classe C^1 (o C^2) se e solo se lo è F.

Diremo che $(\theta_0, \tilde{x}_0)$ è un punto critico per $\widehat{F}$ se $\widehat{F}'(\theta_0, \tilde{x}_0) = 0$, o equivalentemente $\nabla\widehat{F}(\theta_0, \tilde{x}_0) = 0$. Per quando sopra, se $\bar{x}_0 \equiv \theta_0 \bmod 2\pi$, si ha che $(\theta_0, \tilde{x}_0)$ è un punto critico per $\widehat{F}$ se e solo se $\bar{x}_0 + \tilde{x}_0$ è un punto critico di F.

4.2 Equazioni differenziali

Cominciamo con il definire l'integrale di una funzione continua $f : [a, b] \to H$, dove H è uno spazio di Hilbert. Per ogni $h \in H$, posso considerare la funzione continua $f_h : [a, b] \to \mathbb{R}$, definita da $f_h(t) = \langle f(t), h\rangle$, per cui risulta ben definito l'integrale

$$\ell(h) = \int_a^b f_h(t)\, dt\,.$$

Si vede facilmente che la funzione $\ell : H \to \mathbb{R}$ così definita è lineare, e limitata:

$$|\ell(h)| = \left| \int_a^b \langle f(t), h\rangle\, dt \right| \le \int_a^b \|f(t)\|\, \|h\|\, dt = \left(\int_a^b \|f(t)\|\, dt \right) \|h\|\,.$$

Per il teorema di Riesz, esiste un unico vettore $I \in H$ tale che

$$\ell(h) = \langle I, h\rangle\,, \quad \text{per ogni } h \in H\,.$$

Tale vettore I si chiama *integrale* di f, e si denota con $\int_a^b f(t)\, dt$. Pertanto, per ogni $h \in H$, si ha che

$$\left\langle \int_a^b f(t)\, dt, h \right\rangle = \int_a^b \langle f(t), h\rangle\, dt\,.$$

Enunciamo il Teorema Fondamentale.

Teorema 13 *Se $f : [a, b] \to H$ è continua, allora, per ogni $t \in [a, b]$,*

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(s)\, ds = f(t)\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $h \in H$, si ha che

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} \int_a^t f(s)\, ds, h \right\rangle &= \frac{d}{dt} \left\langle \int_a^t f(s)\, ds, h \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^t \langle f(s), h\rangle\, ds \\ &= \langle f(t), h\rangle\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ∎

Affrontiamo ora il problema di Cauchy su $\mathcal{M} = \mathbb{T}^N \times \widetilde{H}$. È dato un campo di vettori V, che a ogni $p \in \mathcal{M}$ associa un vettore $V(p) \in T_p(\mathcal{M})$. Pertanto, se $p = (\theta, \tilde{x})$, abbiamo che $V(p) = (V_1(p), V_2(p))$, con $V_1(p) \in T_\theta(\mathbb{T}^N)$ e $V_2(p) \in \widetilde{H}$. Il problema da studiare si scrive nel modo usuale,

$$(P_C) \qquad \begin{cases} p' = V(p)\,, \\ p(0) = p_0\,, \end{cases}$$

ma dobbiamo spiegare cosa si intenda per "p è soluzione di (P_C)". Dapprima definiamo un campo di vettori $\widetilde{V}$ su $H = \mathbb{R}^N \times \widetilde{H}$: ricordando l'isomorfismo $\varphi_\theta : \mathbb{R}^N \to T_\theta(\mathbb{T}^N)$, se $\bar{x} \equiv \theta \mod 2\pi$, poniamo

$$\widetilde{V}(\bar{x}, \tilde{x}) = (\varphi_\theta^{-1}(V_1(\theta, \tilde{x})), V_2(\theta, \tilde{x}))\,.$$

Possiamo ora introdurre un problema di Cauchy in H associato a (P_C): se $p_0 = (\theta_0, \tilde{x}_0)$, prendiamo un $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ con $\bar{x}_0 \equiv \theta_0 \mod 2\pi$ e scriviamo

$$(\widetilde{P}_C) \qquad \begin{cases} x' = \widetilde{V}(x)\,, \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$

con $x_0 = (\bar{x}_0, \tilde{x}_0)$. Una soluzione di $(\widetilde{P}_C)$ è una funzione continua $x : J \to H$, definita su un intervallo J, intorno di 0, tale che, per ogni $t \in J$, si abbia

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \widetilde{V}(x(s))\, ds\,.$$

Per questo tipo di equazione si può procedere con le classiche tecniche usate per studiare le equazioni differenziali in $\mathbb{R}^n$. Ad esempio, se la funzione $\widetilde{V}$ è localmente lipschitziana, si dimostra (facendo uso del teorema delle contrazioni) che esiste un'unica soluzione, definita in un intervallo massimale J. Se poi $\widetilde{V}$ è lipschitziana su tutto H, tale soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Sia dunque $x : J \to H$ una soluzione di $(\widetilde{P}_C)$. Ricordando che $H = \mathbb{R}^N \times \widetilde{H}$, possiamo scrivere $x(t) = \hat{x}(t) + \tilde{x}(t)$, con $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ e $\tilde{x}(t) \in \widetilde{H}$. Sia ora $\theta : J \to \mathbb{T}^N$ una funzione continua tale che $\theta(t) \equiv \hat{x}(t) \mod 2\pi$, per ogni $t \in J$. Ecco che la funzione $p : J \to \mathbb{T}^N \times \widetilde{H}$, definita da $p(t) = (\theta(t), \tilde{x}(t))$, è la soluzione del problema (P_C).

Riassumendo, possiamo dire che studiare il problema di Cauchy (P_C) sulla varietà $\mathcal{M} = \mathbb{T}^N \times \widetilde{H}$ è in un certo senso equivalente a studiare un problema di Cauchy su uno spazio di Hilbert $H = \mathbb{R}^N \times \widetilde{H}$, ottenuto dopo aver, da un lato, "srotolato" il toro $\mathbb{T}^N$ e, dall'altro, identificato lo spazio tangente in ogni punto del toro con lo spazio $\mathbb{R}^N$.

References

[1] S. Ahmad, A.C. Lazer e J.L. Paul, Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value problems at resonance, Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 933–944.

[2] A. Ambrosetti e P.H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Functional Analysis 14 (1973), 349–381.

[3] I. Ekeland, On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324–353.

[4] J. Mawhin e M. Willem, Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum-type equations, J. Differential Equations 52 (1984), 264–287.

[5] P. Rabinowitz, Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations, in: Nonlinear Analysis (collection of papers in honor of Erich H. Rothe), Academic Press, New York, 1978, pp. 161–177.