Introduzione al grado topologico

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. Alessandro Fonda

Università di Trieste, a.a. 2013/2014

1 Il grado di Brouwer

Andiamo subito al dunque.

Teorema di esistenza e unicità del grado. *Esiste ed è unica una funzione d che associa ad ogni aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e ad ogni funzione continua $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$ un numero reale*

$$d(f, \Omega)\,,$$

con le seguenti tre proprietà:

• *A1 (normalizzazione). Se $0 \in \Omega$, allora $d(I, \Omega) = 1$;* [1]

• *A2 (additività). Se Ω_1 e Ω_2 sono due sottoinsiemi aperti disgiunti di Ω tali che $0 \notin f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$, allora $d(f, \Omega) = d(f, \Omega_1) + d(f, \Omega_2)$;*

• *A3 (invarianza per omotopie). Se $F : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$, allora $d(F(\cdot, \lambda), \Omega)$* [2] *è indipendente da $\lambda \in [0, 1]$.*

Il numero $d(f, \Omega)$ si chiama **grado topologico** (o semplicemente **grado**) di f relativo all'insieme Ω. Prima di mostrare la costruzione del grado, ne assumeremo l'esistenza e ne trarremo alcune conseguenze dirette, dalle quali deriverà l'unicità del grado stesso.

Come nell'enunciato del teorema, sarà essenziale supporre che:
▷ Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$,
▷ $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua,
▷ $0 \notin f(\partial\Omega)$.

Osserviamo che, prendendo $\Omega_1 = \Omega$ e $\Omega_2 = \emptyset$, da $A2$ segue che

$$d(f, \emptyset) = 0\,.$$

Inoltre, sempre da $A2$, con $\Omega_2 = \emptyset$, segue la proprietà

[1] I sta a indicare la funzione identità.

[2] $F(\cdot, \lambda) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è la funzione definita da $x \mapsto F(x, \lambda)$, per ogni $\lambda \in [0, 1]$.

• $P1$ (excisione). *Se Ω_1 è un sottoinsieme aperto di Ω tale che $0 \notin f(\overline{\Omega}\backslash\Omega_1)$, allora $d(f,\Omega) = d(f,\Omega_1)$.*

In particolare, prendendo $\Omega_1 = \emptyset$, si ha

• $P2$. *Se $0 \notin f(\overline{\Omega})$, allora $d(f,\Omega) = 0$.*

Equivalentemente, tenendo presente che $0 \notin f(\partial\Omega)$,

• $P2'$ (esistenza). *Se $d(f,\Omega) \neq 0$, allora esiste un $x \in \Omega$ tale che $f(x) = 0$.*

Come conseguenza di $A3$, abbiamo la proprietà

• $P3$ (di Rouché). *Se $\max\limits_{\partial\Omega} \|f-g\| < \min\limits_{\partial\Omega} \|f\|$, allora $d(f,\Omega) = d(g,\Omega)$.*

In effetti, basta considerare la funzione continua $F(x,\lambda) = (1-\lambda)f(x) + \lambda g(x)$ e osservare che, se $x \in \partial\Omega$ e $\lambda \in [0,1]$, allora [3]

$$\|F(x,\lambda)\| = \|f(x) - \lambda(f(x) - g(x))\| \geq \|f(x)\| - \lambda\|f(x) - g(x)\| > 0\,.$$

Quindi, $0 \notin F(\partial\Omega \times [0,1])$ e, per $A3$,

$$d(f,\Omega) = d(F(\cdot,0),\Omega) = d(F(\cdot,1),\Omega) = d(g,\Omega)\,.$$

In particolare, si ha

• $P4$. *Se $f = g$ su $\partial\Omega$, allora $d(f,\Omega) = d(g,\Omega)$.*

Come esempio di applicazione del grado topologico, dimostriamo il seguente

Teorema di Brouwer. *Sia $f : \overline{B}_R \to \overline{B}_R$ [4] una funzione continua. Allora f ha un punto fisso: esiste un $x \in \overline{B}_R$ tale che $f(x) = x$.*

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo che f non abbia punti fissi su ∂B_B (in caso contrario non c'è nulla da dimostrare). Consideriamo la funzione continua $F(x,\lambda) = x - f(x) + \lambda f(x)$ e osserviamo che, se $x \in \partial B_R$ e $\lambda \in]0,1]$, allora

$$\|F(x,\lambda)\| \geq \|x\| - (1-\lambda)\|f(x)\| \geq R - (1-\lambda)R > 0\,,$$

mentre, se $\lambda = 0$, si ha $F(x,0) \neq 0$, per ogni $x \in \partial B_R$. Quindi, $0 \notin F(\partial B_R \times [0,1])$ e, per $A3$ e $A1$,

$$d(I-f,B_R) = d(F(\cdot,0),B_R) = d(F(\cdot,1),B_R) = d(I,B_R) = 1\,.$$

Per $P2'$, esiste un $x \in B_R$ tale che $(I-f)(x) = 0$, ossia $f(x) = x$. ■

Osservazione. Il teorema di Brouwer si estende facilmente al caso in cui la palla $\overline{B}_R$ sia sostituita con un insieme ad essa omeomorfo. In effetti, sia V un tale insieme, $f : V \to V$ continua e $h : \overline{B}_R \to V$ un omeomorfismo. Applicando il teorema alla funzione $g = h^{-1} \circ f \circ h : \overline{B}_R \to \overline{B}_R$, si trova un $x \in \overline{B}_R$ tale che $g(x) = x$. Ponendo $y = h(x)$, si ha che $f(y) = y$.

---

[3] Qui e nel seguito, $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea in $\mathbb{R}^N$.

[4] B_R è la palla aperta centrata in 0 di raggio $R > 0$: $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < R\}$. Pertanto, $\overline{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq R\}$ e $\partial B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = R\}$.

Vediamo ora il caso di una funzione lineare $f = \mathcal{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Si noti che, se $\ker \mathcal{A} \neq \{0\}$ e $\ker \mathcal{A} \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$, allora anche $\ker \mathcal{A} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, per cui il grado $d(\mathcal{A}, \Omega)$ risulta non definito. Se invece $\ker \mathcal{A} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, per $P2$ si ha $d(\mathcal{A}, \Omega) = 0$.

• $P5$. *Sia $\mathcal{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineare e invertibile. Se $0 \in \Omega$, allora*

$$d(\mathcal{A}, \Omega) = \operatorname{sgn}(\det \mathcal{A}) .$$

Dimostrazione. Se un'applicazione lineare si annulla solo in 0, la proprietà $P1$ ci assicura che il suo grado topologico è lo stesso per tutti gli aperti che contengono 0. Per semplicità, prendiamo $\Omega = B_R$, con $R > 0$ qualsiasi. Supporremo noto il seguente

Lemma. *Siano $\lambda_1, ..., \lambda_p$ gli (eventuali) autovalori reali negativi di $\mathcal{A}$. Allora $\mathbb{R}^N = \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}$, dove $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ sono sottospazi tali che:*

(i) $\mathcal{A}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ e $\mathcal{A}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$;

(ii) $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sono i soli autovalori di $\mathcal{A}|_{\mathcal{N}}$;

(iii) $\mathcal{A}|_{\mathcal{M}}$ non ha autovalori reali negativi.

Essendo $\mathcal{A}$ una applicazione lineare reale, gli autovalori complessi appaiono a coppie del tipo λ, λ^*, per cui si avrà

$$\operatorname{sgn}(\det \mathcal{A}) = (-1)^m ,$$

con $m = \dim \mathcal{N} = \sum_{k=1}^{p} m_k$, dove $m_1, ..., m_p$ sono le molteplicità degli autovalori negativi $\lambda_1, ..., \lambda_p$.

Se $m = 0$, ossia se $\mathcal{A}$ non ha autovalori reali negativi, consideriamo la funzione continua $F(x, \lambda) = (1 - \lambda)\mathcal{A}x + \lambda x$. [5] Siccome gli autovalori delle applicazioni lineari $(1-\lambda)\mathcal{A} + \lambda I$, con $\lambda \in [0, 1]$, stanno sui segmenti nel piano complesso che congiungono gli autovalori di $\mathcal{A}$ con il punto 1, essi non possono essere nulli, per alcun $\lambda \in [0, 1]$, e da $A3$ e $A1$ segue che

$$d(\mathcal{A}, B_R) = d(I, B_R) = 1 = \operatorname{sgn}(\det \mathcal{A}) .$$

Supponiamo ora $m \geq 1$. Siano $\mathcal{P} : \mathbb{R}^N \to \mathcal{N}$ e $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P} : \mathbb{R}^N \to \mathcal{M}$ le due proiezioni associate alla decomposizione $\mathbb{R}^N = \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}$. Consideriamo la funzione continua $F(x, \lambda) = (1 - \lambda)\mathcal{A}x + \lambda(-\mathcal{P} + \mathcal{Q})x$, e vediamo quando si annulla. Se $\lambda = 0$, essendo $\mathcal{A}$ invertibile, deve essere $x = 0$. Se $\lambda = 1$, deve essere $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Infine, se $\lambda \in]0, 1[$, per (i) abbiamo

$$F(x, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}\mathcal{P}x = \frac{\lambda}{1 - \lambda}\mathcal{P}x \quad \text{e} \quad \mathcal{A}\mathcal{Q}x = -\frac{\lambda}{1 - \lambda}\mathcal{Q}x ,$$

[5]Le omotopie in questa dimostrazione, per mancanza di fantasia, si denoteranno tutte con $F(x, \lambda)$ o con $G(x, \lambda)$.

e per (ii) e (iii) deve essere ancora $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Per $A3$,

$$d(\mathcal{A}, B_R) = d(-\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R)\,.$$

Considereremo ora separatamente i casi in cui m sia pari o dispari.

Supponiamo m pari. Sia $\mathcal{B} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ un'applicazione lineare che non abbia autovalori reali: ad esempio, possiamo prenderla in modo che $\mathcal{B}^2 = -I : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, cosicché i suoi autovalori sono $\pm i$. Questo si può fare scegliendo una base ortogonale in $\mathcal{N}$ e la matrice $m \times m$ associata a $\mathcal{B}$ a blocchi sulla diagonale del tipo $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Consideriamo la funzione continua

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)(-\mathcal{P} + \mathcal{Q})x + \lambda(\mathcal{B}\mathcal{P} + \mathcal{Q})x\,,$$

e vediamo quando si annulla. Se $\lambda = 0$, deve essere $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Se $\lambda \in \,]0, 1]$, abbiamo

$$F(x, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B}\mathcal{P}x = \frac{1-\lambda}{\lambda}\mathcal{P}x \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}x = 0\,,$$

per cui deve essere ancora $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Per $A3$, si ha

$$d(-\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(\mathcal{B}\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R)\,.$$

Consideriamo infine la funzione continua

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)(\mathcal{B}\mathcal{P} + \mathcal{Q})x + \lambda(\mathcal{P} + \mathcal{Q})x\,,$$

e in modo analogo vediamo che, se $\lambda \in [0, 1]$, essa si annulla solo per $x = 0$. Quindi, per $A3$,

$$d(\mathcal{B}\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R)\,.$$

In defiinitiva, siccome $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I$, per $A1$ si ha che

$$d(\mathcal{A}, B_R) = d(I, B_R) = 1 = \operatorname{sgn}(\det \mathcal{A})\,.$$

Supponiamo ora m dispari. Scriviamo $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$, con $\dim \mathcal{N}_1 = 1$, e siano $\mathcal{P}_1 : \mathcal{N} \to \mathcal{N}_1$ e $\mathcal{P}_2 = I - \mathcal{P}_1 : \mathcal{N} \to \mathcal{N}_2$ le due proiezioni associate. Si noti che

$$-\mathcal{P} + \mathcal{Q} = -\mathcal{P}_1\mathcal{P} - \mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}\,.$$

Consideriamo la funzione continua

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)(-\mathcal{P} + \mathcal{Q})x + \lambda(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q})x\,,$$

dove $\mathcal{B} : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N}_2$ è un'applicazione lineare che non abbia autovalori reali (vedi sopra). Vediamo quando F si annulla. Se $\lambda = 0$, deve essere $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Se $\lambda \in \,]0, 1]$, abbiamo

$$F(x, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_1\mathcal{P}x = 0\,, \quad \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P}x = \frac{1-\lambda}{\lambda}\mathcal{P}_2\mathcal{P}x \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}x = 0\,,$$

per cui deve essere anche $\mathcal{P}_2\mathcal{P}x = 0$ e quindi $x = 0$. Pertanto, con $A3$ si ha

$$d(-\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R)\,.$$

Se poi consideriamo la funzione continua

$$F(x,\lambda) = (1-\lambda)(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q})x + \lambda(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q})x\,,$$

in modo analogo vediamo che

$$d(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(-\widetilde{\mathcal{P}}_1 + \widetilde{\mathcal{P}}_2, B_R)\,,$$

dove $\widetilde{\mathcal{P}}_1 = \mathcal{P}_1\mathcal{P} : \mathbb{R}^N \to \mathcal{N}_1$ e $\widetilde{\mathcal{P}}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q} : \mathbb{R}^N \to \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{M}$ sono le proiezioni associate alla decomposizione $\mathbb{R}^N = \mathcal{N}_1 \oplus [\mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{M}]$. Poniamo

$$\widetilde{B}_R^1 = B_R \cap \mathcal{N}_1\,, \qquad \widetilde{B}_R^2 = B_R \cap (\mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{M})\,.$$

Usando $P1$, ho che

$$d(-\widetilde{\mathcal{P}}_1 + \widetilde{\mathcal{P}}_2, B_R) = d(-\widetilde{\mathcal{P}}_1 + \widetilde{\mathcal{P}}_2, \widetilde{B}_R^1 + \widetilde{B}_R^2)\,.$$

Definiamo ora una funzione $\tilde{d}$ che associa a ogni aperto limitato $U \subseteq \mathcal{N}_1$ e a ogni funzione continua $g : \overline{U} \to \mathcal{N}_1$ tale che $0 \notin g(\partial U)$ il numero reale

$$\tilde{d}(g, U) = d(g \circ \widetilde{\mathcal{P}}_1 + \widetilde{\mathcal{P}}_2\,,\, U + \widetilde{B}_R^2)\,.$$

Possiamo verificare che valgono le seguenti proprietà:

$\tilde{A}1$ (normalizzazione). Se $0 \in U$, allora $\tilde{d}(I, U) = 1$.

$\tilde{A}2$ (additività). Se U_1 e U_2 sono due sottoinsiemi aperti disgiunti di U tali che $0 \notin g(\overline{U}\backslash(U_1 \cup U_2))$, allora $\tilde{d}(g, U) = \tilde{d}(g, U_1) + \tilde{d}(g, U_2)$;

$\tilde{A}3$ (invarianza per omotopie). Se $G : \overline{U} \times [0,1] \to \mathcal{N}_1$ è una funzione continua tale che $0 \notin G(\partial U \times [0,1])$, allora $\tilde{d}(G(\cdot,\lambda), U)$ è indipendente da $\lambda \in [0,1]$.

Da esse seguono inoltre le analoghe delle $P1-P4$, che indicheremo con $\tilde{P}1-\tilde{P}4$. Resta da dimostrare che

$$d(-\widetilde{\mathcal{P}}_1 + \widetilde{\mathcal{P}}_2, \widetilde{B}_R^1 + \widetilde{B}_R^2) = \tilde{d}(-I, \widetilde{B}_R^1) = -1\,.$$

Sia $\mathcal{N}_1 = \{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}\}$, per un certo $e \in \mathbb{R}^N$ con $\|e\| = 1$. Si noti che, per $\rho > 0$,

$$\widetilde{B}_\rho^1 =]-\rho e, \rho e[= \{\alpha e : \alpha \in]-\rho, \rho[\,\}\,.$$

Definiamo in $\mathcal{N}_1$ gli aperti

$$U =]-2e, 2e[\,, \qquad U_1 =]-2e, 0[\,, \qquad U_2 =]0, 2e[\,.$$

Consideriamo la funzione continua $G : \overline{U} \times [0,1] \to \mathcal{N}_1$ definita da

$$G(\alpha e, \lambda) = (1-\lambda)e + \lambda(|\alpha| - 1)e \,.$$

Si noti che $G(\cdot, 0)$ è costante, con $G(\alpha e, 0) = e \neq 0$, per ogni α. Per $\tilde{P}2$, si ha $\tilde{d}(G(\cdot,0), U) = 0$. D'altra parte, se $\alpha e \in \partial U$, ossia $|\alpha| = 2$, si ha che $G(\alpha e, \lambda) = e \neq 0$. Per $\tilde{P}4$,

$$0 = \tilde{d}(G(\cdot,0), U) = \tilde{d}(G(\cdot,1), U) \,.$$

Ora, poniamo $G(\cdot,1) = h : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_1$; essa è definita da

$$h(\alpha e) = (|\alpha| - 1)e \,.$$

Inoltre, per $\tilde{A}2$,

$$0 = \tilde{d}(h, U) = \tilde{d}(h, U_1) + \tilde{d}(h, U_2) = \tilde{d}(h_1, U) + \tilde{d}(h_2, U) \,,$$

dove

$$h_1(\alpha e) = -(\alpha + 1)e \,, \qquad h_2(\alpha e) = (\alpha - 1)e \,.$$

Consideriamo ora le funzioni continue

$$G_1(\alpha e, \lambda) = -(\alpha + 1 - \lambda)e \,, \qquad G_2(\alpha e, \lambda) = (\alpha - 1 + \lambda)e \,,$$

e con $\tilde{A}3$ vediamo che

$$\tilde{d}(h_1, U) = \tilde{d}(-I, U) \,, \qquad \tilde{d}(h_2, U) = \tilde{d}(I, U) \,.$$

Quindi, per $\tilde{A}1$,

$$0 = \tilde{d}(-I, U) + \tilde{d}(I, U) = \tilde{d}(-I, U) + 1 \,,$$

da cui

$$\tilde{d}(-I, U) = -1 \,.$$

In definitiva, essendo $\tilde{d}(-I, \tilde{B}^1_R) = \tilde{d}(-I, U)$, si ha

$$d(\mathcal{A}, B_R) = d(-I, \widetilde{B}^1_R) = -1 = \mathrm{sgn}(\det \mathcal{A}) \,.$$

$\blacksquare$

Supponiamo ora che $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ sia di classe C^1. Indichiamo con $df(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ il differenziale di f nel punto x e con $J_f(x)$ la matrice jacobiana. Diremo che $y \in \mathbb{R}^N$ è un "valore regolare" per f se

$$x \in f^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad \det J_f(x) \neq 0 \,.$$

In particolare, se $f^{-1}(y) = \emptyset$, allora y è un valore regolare. Dimostriamo la seguente proprietà:

- *P6. Se 0 è un valore regolare per f e $0 \notin f(\partial\Omega)$, allora*

$$d(f,\Omega) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(\det J_f(x))\,,$$

e tale somma è finita.

Dimostrazione. Se $f^{-1}(0) = \emptyset$, la formula segue dalla proprietà $P2$. Supporremo quindi $f^{-1}(0)$ non vuoto. Per il teorema del diffeomorfismo locale, l'insieme $f^{-1}(0)$ è costituito da punti isolati e quindi, essendo contenuto in $\overline{\Omega}$ che è compatto, è un insieme finito:

$$f^{-1}(0) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}\,.$$

In ognuno degli x_j è centrata una palla aperta U_j su cui f è un diffeomorfismo. Prendendo questi insiemi a due a due disgiunti, per $A2$, si ha

$$d(f,\Omega) = \sum_{j=1}^{m} d(f, U_j)\,.$$

Sappiamo inoltre che, per $j = 1, 2, ..., m$, essendo $f(x_j) = 0$,

$$f(x) = \mathcal{A}_j(x - x_j) + r_j(x)\,, \quad \text{con} \quad \lim_{x \to x_j} \frac{r_j(x)}{\|x - x_j\|} = 0\,,$$

dove abbiamo posto $\mathcal{A}_j = df(x_j)$. Essendo quest'ultima applicazione lineare invertibile, esiste un $c_j > 0$ tale che, per ogni $h \in \mathbb{R}^N$,

$$\|\mathcal{A}_j(h)\| \geq c_j \|h\|\,.$$

Restringendo eventualmente i raggi delle palle U_j, possiamo supporre che, per ogni $x \in \overline{U}_j$,

$$\|r_j(x)\| < c_j \|x - x_j\|\,.$$

Considerando la funzione continua $F_j : \overline{U}_j \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$F_j(x,\lambda) = (1-\lambda) f(x) + \lambda \mathcal{A}_j(x - x_j)\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} \|F_j(x,\lambda)\| &\geq \|\mathcal{A}_j(x - x_j)\| - (1-\lambda)\|f(x) - \mathcal{A}_j(x - x_j)\| \\ &\geq c_j \|x - x_j\| - \|r_j(x)\| > 0\,, \end{aligned}$$

e quindi, per $A3$,

$$d(f, U_j) = d(\mathcal{A}_j(\cdot - x_j), U_j)\,.$$

Siccome x_j è l'unico punto in cui $\mathcal{A}_j(\cdot - x_j)$ si annulla, per $A2$ si ha

$$d(\mathcal{A}_j(\cdot - x_j), U_j) = d(\mathcal{A}_j(\cdot - x_j), B_R)\,,$$

dove B_R è una palla centrata in 0 che contiene U_j. Consideriamo la funzione continua $G_j : \overline{B}_R \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$, con

$$\begin{aligned} G_j(x,\lambda) &= (1-\lambda)\mathcal{A}_j(x-x_j) + \lambda\mathcal{A}_j x \\ &= \mathcal{A}_j(x-(1-\lambda)x_j)\,. \end{aligned}$$

Se $x \in \partial B_R$ e $\lambda \in [0,1]$, siccome $(1-\lambda)x_j \in B_R$, si ha che $x-(1-\lambda)x_j \neq 0$, per cui $G_j(x,\lambda) \neq 0$. Quindi, per $A3$ e la proprietà $P5$,

$$d(\mathcal{A}_j(\cdot - x_j), B_R) = d(\mathcal{A}_j, B_R) = \operatorname{sgn}(\det \mathcal{A}_j) = \operatorname{sgn}(\det J_f(x_j))\,.$$

In conclusione,

$$d(f,\Omega) = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{sgn}(\det J_f(x_j))\,.$$

■

Supponiamo ora $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ continua. Sia $q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una funzione polinomiale tale che

$$\max_{\overline{\Omega}} \|f-q\| < \frac{1}{2}\min_{\partial\Omega} \|f\|\,,$$

la cui esistenza è assicurata dal teorema di Stone - Weierstrass (vedi Appendice). Ponendo $Q(x) = \det J_q(x)$, abbiamo che $Q(x)$ è un polinomio in N variabili, a valori reali. Avremo bisogno del seguente

Lemma. *Se $Q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione polinomiale non identicamente nulla, allora l'insieme degli zeri*

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^N : Q(x) = 0\}$$

ha misura di Lebesgue nulla.

<u>Dimostrazione del lemma.</u> L'affermazione è sicuramente vera se $N=1$ in quanto, in tal caso, Z è costituito da un numero finito di punti isolati. Se $N=2$, scrivendo $x=(x_1,x_2)$, le sezioni

$$Z(x_1,*) = \{x_2 \in \mathbb{R} : Q(x_1,x_2) = 0\}\,,$$

o coincidono con $\mathbb{R}$, o hanno misura nulla in $\mathbb{R}$ (perchè costituite da un numero finito di elementi). Inoltre, sicuramente esiste un $\bar{x}_2$ per cui $Q(\cdot,\bar{x}_2)$ non è identicamente nullo, e pertanto, essendo un polinomio, esso ha solo un numero finito di zeri. Ne segue che l'uguaglianza $Z(x_1,*) = \mathbb{R}$ può verificarsi solo per un numero finito di x_1. Quindi, quasi tutte le sezioni $Z(x_1,*)$ hanno misura nulla in $\mathbb{R}$, e per il teorema di Fubini, Z ha misura nulla in $\mathbb{R}^2$.
Ora si procede in modo analogo, per induzione. Supponiamo vera l'affermazione per $N-1$, con $N \geq 2$. Scriviamo $x=(x_1,x_2)$, con $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}^{N-1}$. Le sezioni

$$Z(x_1,*) = \{x_2 \in \mathbb{R}^{N-1} : Q(x_1,x_2) = 0\}\,,$$

o coincidono con $\mathbb{R}^{N-1}$, o hanno misura nulla in $\mathbb{R}^{N-1}$, per ipotesi induttiva. Inoltre, sicuramente esiste un $\bar{x}_2$ per cui $Q(\cdot, \bar{x}_2)$ non è identicamente nullo, e pertanto ha solo un numero finito di zeri. Ne segue che l'uguaglianza $Z(x_1, *) = \mathbb{R}^{N-1}$ può verificarsi solo per un numero finito di x_1. Quindi, quasi tutte le sezioni $Z(x_1, *)$ hanno misura nulla in $\mathbb{R}^{N-1}$, e per il teorema di Fubini, Z ha misura nulla in $\mathbb{R}^N$. Il lemma è così dimostrato.

Considereremo ora due casi.

<u>Caso 1.</u> Supponiamo dapprima che Q non sia identicamente nullo, per cui Z ha misura nulla. Siccome $q(x)$ è localmente lipschitziana, anche $q(Z)$ ha misura nulla. Pertanto, $\mathbb{R}^N \setminus q(Z)$, l'insieme dei valori regolari di q, è denso in $\mathbb{R}^N$. Esiste pertanto un valore regolare $v \in \mathbb{R}^N$ per q tale che $\|v\| < \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} \|f\|$. Ponendo $p(x) = q(x) - v$, si ha che 0 è un valore regolare per p, e inoltre $\max_{\overline{\Omega}} \|f - p\| < \min_{\partial\Omega} \|f\|$. Per la proprietà $P3$ di Rouché e per la $P6$,

$$d(f, \Omega) = d(p, \Omega) = \sum_{x \in p^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(\det J_p(x))\,.$$

<u>Caso 2.</u> Supponiamo ora che Q sia identicamente nullo. Questo significa che $J_q(x)$ ha un autovalore uguale a zero, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Consideriamo allora il polinomio $\hat{q}(x) = q(x) + \varepsilon x$, con $\varepsilon > 0$. Essendo

$$J_{\hat{q}}(x) = J_q(x) + \varepsilon I\,,$$

avremo che, se $\varepsilon > 0$ è sufficientemente piccolo, $J_{\hat{q}}(0)$ non può avere autovalori uguali a zero. Pertanto, ponendo $\hat{Q}(x) = \det J_{\hat{q}}(x)$, abbiamo che $\hat{Q}$ non è identicamente nullo. Inoltre, se ε è piccolo, avremo ancora

$$\max_{\overline{\Omega}} \|f - \hat{q}\| < \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} \|f\|\,,$$

per cui ci si può ricondurre al caso precedente.

Abbiamo quindi dimostrato che la funzione continua f si può sempre approssimare su $\overline{\Omega}$ con funzioni polinomiali per le quali 0 è un valore regolare. Per tali funzioni, il grado è ben determinato da una somma finita di interi (precisamente 1 o -1), e coincide con $d(f, \Omega)$. Abbiamo pertanto dimostrato che una funzione d che verifichi le proprietà $A1$, $A2$ e $A3$ è univocamente determinata. Possiamo infine concludere con

- $P7$. Il valore di $d(f, \Omega)$ è sempre un intero.

⌈ Possiamo facilmente caratterizzare il grado nel caso unidimensionale $N = 1$, qualora Ω sia un intervallo $]a, b[$. Supponendo $f(a) \neq 0 \neq f(b)$, consideriamo ⌉

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda) f(x) + \lambda \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right].$$

Siccome $F(a,\lambda) = f(a) \neq 0$ e $F(b,\lambda) = f(b) \neq 0$, per ogni $\lambda \in [0,1]$, avremo che

$$d(f, \,]a,b[\,) = d(F(\cdot,0)\,]a,b[\,) = d(F(\cdot,1)\,]a,b[\,)\,,$$

da cui

$$d(f, \,]a,b[\,) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(a)f(b) > 0\,, \\ 1 & \text{se } f(a) < 0 < f(b)\,, \\ \text{-1} & \text{se } f(a) > 0 > f(b)\,. \end{cases}$$

Dimostrata l'unicità, vediamo ora come si può definire il grado topologico. Ricordiamo le ipotesi:

▷ Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$,

▷ $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua,

▷ $0 \notin f(\partial\Omega)$.

Cominciamo con il supporre f di classe C^2. In tal caso, poniamo

$$d(f,\Omega) = \int_\Omega c(\|f(x)\|) \det J_f(x)\,dx\,,$$

dove $c : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che

(i) $\text{supp}(c) \subseteq \left]0, \min\limits_{\partial\Omega} \|f\|\right[$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}^N} c(\|x\|)\,dx = 1\,.$

Qui supp(c) sta a indicare il supporto di c, ovvero la chiusura dell'insieme dei punti su cui c è non nulla. Si noti che (ii) è equivalente a

(ii') $\int_0^{+\infty} c(r)r^{N-1}\,dr = \frac{1}{\mu_{N-1}}\,,$

dove μ_{N-1} è la misura $(N-1)-$dimensionale della sfera unitaria in $\mathbb{R}^N$, se $N \geq 2$, mentre $\mu_0 = 2$.

Dobbiamo verificare che quella data è una buona definizione. Prendiamo dunque una funzione $\tilde{c}$ con le stesse proprietà (i), (ii) di c, e vediamo che l'integrale che definisce $d(f,\Omega)$ resta lo stesso. Sia $a = c - \tilde{c} : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, per cui

$$\text{supp}(a) \subseteq \left]0, \min_{\partial\Omega} \|f\|\right[, \qquad \int_0^{+\infty} a(r)r^{N-1}\,dr = 0\,.$$

Definiamo, per $r > 0$,

$$A(r) = \frac{1}{r^N} \int_0^r a(s)s^{N-1}\,ds\,,$$

e poniamo $A(0) = 0$, cosicché $A : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 e supp$A \subseteq \left]0, \min\limits_{\partial\Omega} \|f\|\right[$. Consideriamo le forme differenziali

$$\begin{aligned} \omega_a(y) &= a(\|y\|)\,dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_N \\ &= a(\|y\|)\,\omega_1(y)\,, \end{aligned}$$

dove
$$\omega_1(y) = dy_1 \wedge ... \wedge dy_N \,,$$
e
$$\begin{aligned}\sigma_A(y) &= A(\|y\|) \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} y_j \, dy_1 \wedge ... \wedge \widehat{dy_j} \wedge ... \wedge dy_N \\ &= A(\|y\|)\, \sigma_1(y)\,,\end{aligned}$$
dove
$$\sigma_1(y) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} y_j \, dy_1 \wedge ... \wedge \widehat{dy_j} \wedge ... \wedge dy_N \,.$$
Essendo
$$d\sigma_1(y) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} dy_j \wedge dy_1 \wedge ... \wedge \widehat{dy_j} \wedge ... \wedge dy_N = N\omega_1(y)\,,$$
e
$$rA'(r) + NA(r) = a(r)\,,$$
per ogni $r \geq 0$, si ha
$$\begin{aligned}d\sigma_A(y) &= d[A(\|y\|)] \wedge \sigma_1(y) + A(\|y\|) d\sigma_1(y) \\ &= A'(\|y\|) \sum_{k=1}^{N} \frac{y_k}{\|y\|} \, dy_k \wedge \sigma_1(y) + NA(\|y\|)\omega_1(y) \\ &= (\|y\| A'(\|y\|) + NA(\|y\|))\, dy_1 \wedge ... \wedge dy_N \\ &= a(\|y\|)\, dy_1 \wedge ... \wedge dy_N \\ &= \omega_a(y)\,.\end{aligned}$$
Quindi,
$$\begin{aligned}&\int_\Omega c(\|f(x)\|) \det J_f(x)\, dx - \int_\Omega \tilde{c}(\|f(x)\|) \det J_f(x)\, dx = \\ &= \int_\Omega a(\|f(x)\|) \det J_f(x)\, dx = \int_\Omega f * \omega_a = \int_\Omega f * d\sigma_A = \int_\Omega d(f * \sigma_A)\,.\end{aligned}$$
Estendiamo $f * \sigma_A$ a tutto $\mathbb{R}^N$ ponendo $f * \sigma_A(x) = 0$ se $x \notin \overline{\Omega}$. Siccome $f * \sigma_A$ ha supporto contenuto in Ω, otteniamo una forma differenziale di classe C^1. Se B_R è una palla contenente Ω, per la formula di Stokes-Cartan,
$$\int_\Omega d(f * \sigma_A) = \int_{B_R} d(f * \sigma_A) = \int_{\partial B_R} f * \sigma_A = 0\,.$$
Abbiamo così verificato che si tratta di una buona definizione.

Sarà conveniente definire la funzione

$$h(y) = c(\|y\|)\,.$$

Si noti inoltre che, con le analoghe notazioni, possiamo scrivere

$$d(f,\Omega) = \int_\Omega f * \omega_c = \int_\Omega (h \circ f)\, df_1 \wedge ... \wedge df_N\,.$$

Dimostriamo ora le tre proprietà $A1$, $A2$, $A3$ nel caso delle funzioni di classe C^2. Se $0 \in \Omega$,

$$d(I,\Omega) = \int_\Omega c(\|x\|)\, dx = 1\,,$$

per le proprietà della funzione c.

Siano ora Ω_1 e Ω_2 sottoinsiemi aperti di Ω per cui $0 \notin f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Scegliendo una funzione c tale che $\mathrm{supp}(c) \subseteq \left]0, \min_{\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)} \|f\|\right[$, si ha che

$$\begin{aligned} d(f,\Omega) &= \int_\Omega c(\|f(x)\|) \det J_f(x)\, dx \\ &= \int_{\Omega_1} c(\|f(x)\|) \det J_f(x)\, dx + \int_{\Omega_2} c(\|f(x)\|) \det J_f(x)\, dx \\ &= d(f,\Omega_1) + d(f,\Omega_2)\,. \end{aligned}$$

Resta da dimostrare l'invarianza per omotopie. Sia $F : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ di classe C^2 tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0,1])$, e sia c di classe C^1 tale che $\mathrm{supp}(c) \subseteq \left]0, \min_{\partial\Omega\times[0,1]} \|F\|\right[$. Scriveremo brevemente

$$d(F(\cdot,\lambda),\Omega) = \int_\Omega h(F(x,\lambda)) \det J_{F(\cdot,\lambda)}(x,\lambda)\, dx = \int_\Omega (h \circ F)\, dF_1 \wedge ... \wedge dF_N\,.$$

Vogliamo dimostrare che la derivata rispetto a λ di tale espressione è sempre nulla. A tal fine, abbiamo il seguente risultato di J. Mawhin:

Lemma. *Si ha*

$$\partial_\lambda[(h \circ F)\, dF_1 \wedge ... \wedge dF_N] = d\tilde{\omega}\,,$$

con

$$\tilde{\omega} = (h \circ F) \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \partial_\lambda F_j\, dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_j} \wedge ... \wedge dF_N\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, per ogni $j = 1, ..., N$,

$$\partial_\lambda[dF_j] = \partial_\lambda \left[\sum_{k=1}^{N} \partial_k F_j dx_k\right] = \left[\sum_{k=1}^{N} \partial_\lambda \partial_k F_j dx_k\right] = \left[\sum_{k=1}^{N} \partial_k \partial_\lambda F_j dx_k\right] = d[\partial_\lambda F_j].$$

Iniziamo il calcolo:

$$\partial_\lambda[(h\circ F)\ dF_1\wedge\ldots\wedge dF_N]=$$
$$=[\partial_\lambda(h\circ F)]\,dF_1\wedge\ldots\wedge dF_N+(h\circ F)\,\partial_\lambda[dF_1\wedge\ldots\wedge dF_N]\,,$$

e si ha

$$\begin{aligned}
&[\partial_\lambda(h\circ F)]\,dF_1\wedge\ldots\wedge dF_N=\\
&\quad=\left[\sum_{j=1}^{N}(\partial_j h\circ F)\,\partial_\lambda F_j\right]\,dF_1\wedge\ldots\wedge dF_N\\
&\quad=\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}(\partial_j h\circ F)\,dF_j\wedge\partial_\lambda F_j\,dF_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dF_j}\wedge\ldots\wedge dF_N\\
&\quad=\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\left[\sum_{k=1}^{n}(\partial_k h\circ F)\,dF_k\right]\wedge\partial_\lambda F_j\,dF_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dF_j}\wedge\ldots\wedge dF_N\\
&\quad=\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}d[h\circ F]\wedge\partial_\lambda F_j\,dF_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dF_j}\wedge\ldots\wedge dF_N\\
&\quad=d[h\circ F]\wedge\left[\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\partial_\lambda F_j\,dF_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dF_j}\wedge\ldots\wedge dF_N\right]\,,
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
&(h\circ F)\ \partial_\lambda[dF_1\wedge\ldots\wedge dF_N]=\\
&\quad=(h\circ F)\sum_{j=1}^{N}dF_1\wedge\ldots\wedge\partial_\lambda dF_j\wedge\ldots\wedge dF_N\\
&\quad=(h\circ F)\sum_{j=1}^{N}dF_1\wedge\ldots\wedge d[\partial_\lambda F_j]\wedge\ldots\wedge dF_N\\
&\quad=(h\circ F)\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}d[\partial_\lambda F_j]\wedge dF_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dF_j}\wedge\ldots\wedge dF_N\\
&\quad=(h\circ F)\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}d[\partial_\lambda F_j\,dF_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dF_j}\wedge\ldots\wedge dF_N]\\
&\quad=(h\circ F)\ d\left[\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\partial_\lambda F_j\,dF_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dF_j}\wedge\ldots\wedge dF_N\right]\,.
\end{aligned}$$

Sommando i due termini,

$$d[h\circ F]\wedge\left[\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\partial_\lambda F_j\,dF_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dF_j}\wedge\ldots\wedge dF_N\right]+$$

$$+ (h \circ F)\, d \left[\sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \partial_\lambda F_j \, dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_j} \wedge ... \wedge dF_N \right] =$$

$$= d \left[(h \circ F) \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \partial_\lambda F_j \, dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_j} \wedge ... \wedge dF_N \right] .$$

■

A questo punto, usando la regola di Leibniz, possiamo scrivere

$$\partial_\lambda [d(F(\cdot, \lambda), \Omega)] = \int_\Omega \partial_\lambda [(h \circ F)\, dF_1 \wedge ... \wedge dF_N] = \int_\Omega d\tilde{\omega} \, ,$$

e $\tilde{\omega}$, come si vede dall'espressione data dal Lemma, ha supporto contenuto in $\Omega \times [0, 1]$. Pertanto, estendendo a tutto $\mathbb{R}^N$ ponendo $\tilde{\omega}$ nullo al di fuori di $\overline{\Omega} \times [0, 1]$, si ha che, se B_R è una palla contenente Ω,

$$\int_\Omega d\tilde{\omega} = \int_{B_R} d\tilde{\omega} = \int_{\partial B_R} \tilde{\omega} = 0 \, ,$$

ossia $d(F(\cdot, \lambda), \Omega)$ è indipendente da $\lambda \in [0, 1]$.

Abbiamo così dimostrato che valgono le proprietà $A1$, $A2$, $A3$ nel caso delle funzioni di classe C^2. Vediamo ora come si definisce il grado per le funzioni continue.

Sia $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Sia $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ una funzione di classe C^2 tale che

$$\max_{\overline{\Omega}} \|f - p\| < \frac{1}{3} \min_{\partial\Omega} \|f\| \, ,$$

la cui esistenza è assicurata, ad esempio, dal teorema di Stone - Weierstrass (vedi Appendice). Abbiamo già definito $d(p, \Omega)$; poniamo allora

$$d(f, \Omega) = d(p, \Omega) \, .$$

Verifichiamo che si tratta di una buona definizione. Se $\tilde{p} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è anch'essa una funzione di classe C^2 tale che

$$\max_{\overline{\Omega}} \|f - \tilde{p}\| < \frac{1}{3} \min_{\partial\Omega} \|f\| \, ,$$

allora, ponendo $\mu = \min\limits_{\partial\Omega} \|f\|$, si ha

$$\max_{\overline{\Omega}} \|p - \tilde{p}\| < \frac{2}{3}\mu \, , \quad \min_{\partial\Omega} \|p\| > \frac{2}{3}\mu \, , \quad \min_{\partial\Omega} \|\tilde{p}\| > \frac{2}{3}\mu \, .$$

Consideriamo $F : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)p(x) + \lambda \tilde{p}(x) \,.$$

Essa è di classe C^2 e, se $x \in \partial\Omega$,

$$\|F(x, \lambda)\| \geq \|p(x)\| - \lambda \|p(x) - \tilde{p}(x)\| > \frac{2}{3}\mu - \lambda \frac{2}{3}\mu \geq 0 \,,$$

per ogni $\lambda \in [0,1]$. Quindi,

$$d(p, \Omega) = d(F(\cdot, 0), \Omega) = d(F(\cdot, 1), \Omega) = d(\tilde{p}, \Omega) \,,$$

e pertanto la definizione data per $d(f, \Omega)$ è giustificata. Essa estende quella data in precedenza per le funzioni f di classe C^2.

Restano da verificare le proprietà $A1$, $A2$ e $A3$. Chiaramente, per $A1$ non ci sono problemi, essendo I di classe C^2. Siano Ω_1 e Ω_2 sottoinsiemi aperti di Ω per cui $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Consideriamo una funzione $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ di classe C^2 tale che

$$\max_{\overline{\Omega}} \|f - p\| < \frac{1}{3} \min_{\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)} \|f\| \,.$$

Per definizione avremo quindi

$$d(f, \Omega) = d(p, \Omega) \,, \quad d(f, \Omega_1) = d(p, \Omega_1) \,, \quad d(f, \Omega_2) = d(p, \Omega_2) \,,$$

e l'additività segue dunque da quella già dimostrata per le funzioni di classe C^2. Infine, sia $F : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ continua tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0,1])$. Consideriamo una $G : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ di classe C^2 tale che

$$\max_{\partial\Omega \times [0,1]} \|F - G\| < \frac{1}{3} \min_{\partial\Omega \times [0,1]} \|F\| \,,$$

e per definizione abbiamo che

$$d(F(\cdot, \lambda), \Omega) = d(G(\cdot, \lambda), \Omega) \,,$$

per ogni $\lambda \in [0,1]$. Essendo stato dimostrato che $d(G(\cdot, \lambda), \Omega)$ è indipendente da $\lambda \in [0,1]$, lo stesso varrà anche per $d(F(\cdot, \lambda), \Omega)$.

La dimostrazione del Teorema di esistenza e unicità del grado è così completata.

■

A questo punto, sarà utile richiamare le proprietà fin qui dimostrate.

Corollario. *Sia $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ continua tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Oltre alle $A1$, $A2$ e $A3$, valgono le seguenti proprietà:*

$P1$ (excisione). Se Ω_1 è un sottoinsieme aperto di Ω tale che $0 \notin f(\overline{\Omega}\setminus\Omega_1)$, allora $d(f,\Omega) = d(f,\Omega_1)$.

$P2$. Se $0 \notin f(\overline{\Omega})$, allora $d(f,\Omega) = 0$.

$P2'$ (esistenza). Se $d(f,\Omega) \neq 0$, allora esiste un $x \in \Omega$ tale che $f(x) = 0$.

$P3$ (di Rouché). Se $\max_{\partial\Omega} \|f - g\| < \min_{\partial\Omega} \|f\|$, allora $d(f,\Omega) = d(g,\Omega)$.

$P4$. Se $f = g$ su $\partial\Omega$, allora $d(f,\Omega) = d(g,\Omega)$.

$P5$. Se $f = \mathcal{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è lineare, invertibile e $0 \in \Omega$, allora $d(\mathcal{A},\Omega) = \mathrm{sgn}(\det \mathcal{A})$.

$P6$. Se f è di classe C^1 e 0 è un suo valore regolare, allora $d(f,\Omega) = \sum_{x\in f^{-1}(0)} \mathrm{sgn}(\det J_f(x))$, e tale somma è finita.

$P7$. Il valore di $d(f,\Omega)$ è sempre un intero.

Se $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è continua e $y \in \mathbb{R}^N\setminus f(\partial\Omega)$, si pone

$$d(f,\Omega,y) = d(f(\cdot) - y,\Omega)\,.$$

Chiaramente, $d(f,\Omega) = d(f,\Omega,0)$. Vale la seguente proprietà

$P8$. $d(f,\Omega,\cdot)$ è costante sulle componenti connesse di $\mathbb{R}^N\setminus f(\partial\Omega)$.

In effetti, ogni componente connessa di $\mathbb{R}^N\setminus f(\partial\Omega)$ è un insieme aperto e quindi connesso per archi. Se y_1 e y_2 appartengono alla stessa componente connessa, esiste una curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N$, contenuta nella stessa, tale che $\gamma(0) = y_1$ e $\gamma(1) = y_2$. La funzione continua $F(x,\lambda) = f(x) - \gamma(\lambda)$ è tale che $F(x,\lambda) \neq 0$, per ogni x e ogni $\lambda \in [0,1]$. Quindi

$$d(f,\Omega,y_1) = d(F(\cdot,0),\Omega) = d(F(\cdot,1),\Omega) = d(f,\Omega,y_2)\,.$$

Faremo ora delle considerazioni che ci porteranno a una diversa interpretazione del grado, nel caso in cui $\partial\Omega$ sia sufficientemente regolare. Siano $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ due numeri reali tali che

$$0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \min_{\partial\Omega} \|f\|\,,$$

e consideriamo una funzione $B : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, di classe C^1, tale che

$$B(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq r \leq \varepsilon_0\,, \\ r^{-N} & \text{se } r \geq \varepsilon_1\,. \end{cases}$$

Sia $b : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$b(r) = rB'(r) + NB(r)\,,$$

per cui, come già dimostrato in precedenza, $d\sigma_B = \omega_b$. Si vede che $\mathrm{supp}(b) \subseteq [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$, e

$$\int_0^{+\infty} b(r) r^{N-1}\, dr = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} b(r) r^{N-1}\, dr = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} \frac{d}{dr}(r^N B(r))\, dr = \varepsilon_1^N B(\varepsilon_1) = 1\,.$$

La funzione $c(x) = \frac{1}{\mu_{N-1}} b(x)$ verifica le condizioni (i) e (ii) che le competono e quindi, se $\partial\Omega$ è sufficientemente regolare,

$$\begin{aligned}
d(f,\Omega) &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_\Omega b(\|f(x)\|) \det J_f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_\Omega f * \omega_b \\
&= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_\Omega f * (d\sigma_B) \\
&= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_\Omega d(f * \sigma_B) \\
&= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_{\partial\Omega} f * \sigma_B \\
&= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_{\partial\Omega} \|f\|^{-N} \left(\sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} f_j\, df_1 \wedge ... \wedge \widehat{df_j} \wedge ... \wedge df_N \right).
\end{aligned}$$

In particolare, se $N = 2$, otteniamo l'**indice di avvolgimento**

$$d(f,\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}\,.$$

Se $\partial\Omega$ è parametrizzabile con una funzione $\psi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1,

$$d(f,\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_1(\psi(t)) \frac{d}{dt} f_2(\psi(t)) - f_2(\psi(t)) \frac{d}{dt} f_1(\psi(t))}{f_1(\psi(t))^2 + f_2(\psi(t))^2}\, dt\,.$$

Scrivendo $f(\psi(t))$ in coordinate polari,

$$f_1(\psi(t)) = \rho(t) \cos\theta(t)\,, \qquad f_2(\psi(t)) = \rho(t) \sin\theta(t)\,.$$

sostituendo nella formula precedente otteniamo

$$d(f,\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta'(t)\, dt = \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi}\,.$$

⌈ Come esempio, abbiamo il seguente risultato, che generalizza il Teorema Fondamentale dell'Algebra. ⌉

Teorema. *Se $f(z) = z^n + g(z)$, con $n \geq 1$ intero e $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che*

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{g(z)}{z^n} = 0\,,$$

allora esiste un $z \in \mathbb{C}$ in cui $f(z) = 0$.

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che il grado della funzione $\hat{f}(z) = z^n$ su una palla B_R è uguale a n. Infatti, parametrizzando ∂B_R con la funzione $\psi(t) = Re^{it}$, abbiamo che $\hat{f}(\psi(t)) = R^n e^{int}$, ossia, con le notazioni precedenti, $\theta(t) = nt$, per cui

$$\frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi} = n\,.$$

Vediamo ora che, per ipotesi, esiste un $R > 0$ tale che, se $|z| \geq R$, allora $|g(z)| < |z|^n$. Consideriamo $F : \overline{B}_R \times [0,1] \to \mathbb{C}$ definita da

$$F(z,\lambda) = (1-\lambda)f(z) + \lambda z^n\,.$$

Se $z \in \partial B_R$, allora

$$|F(z,\lambda)| \geq |z^n| - (1-\lambda)|f(z) - z^n| \geq |z|^n - |g(z)| > 0\,,$$

per ogni $\lambda \in [0,1]$. Quindi, essendo $F(z,1) = z^n$,

$$d(f, B_R) = d(F(\cdot,0), B_R) = d(F(\cdot,1), B_R) = d(\hat{f}, B_R) = n\,.$$

Per $P2'$, esiste un $z \in B_R$ tale che $f(z) = 0$. ■

Notiamo che lo stesso teorema di esistenza e unicità del grado si può enunciare in qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita. In effetti, se X è un tale spazio, di dimensione N, si può considerare un'applicazione lineare invertibile $\varphi : X \to \mathbb{R}^N$ che trasforma una base di X nella base canonica di $\mathbb{R}^N$. Indichiamo con $d_{\mathbb{R}^N}$ il grado in $\mathbb{R}^N$ costruito sopra.

Dati che siano un aperto limitato $\Omega \subseteq X$ e una funzione continua $f : \overline{\Omega} \to X$ tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$, possiamo considerare l'aperto limitato $\widetilde{\Omega} = \varphi(\Omega)$ in $\mathbb{R}^N$ e la funzione continua $\tilde{f} : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ definita da $\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$:

$$\begin{array}{ccccc} & \Omega & \stackrel{f}{\longrightarrow} & X & \\ \varphi & \downarrow & & \uparrow & \varphi^{-1} \\ & \widetilde{\Omega} & \stackrel{\tilde{f}}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^N & \end{array}$$

Una volta verificato che $0 \notin \tilde{f}(\partial\widetilde{\Omega})$, si definisce

$$d_X(f,\Omega) = d_{\mathbb{R}^N}(\tilde{f}, \widetilde{\Omega})\,.$$

Le proprietà A1, A2 e A3 sono di facile verifica per d_X, che risulta pertanto un grado su X.

Per quanto riguarda l'unicità, supponiamo che sia definito un grado d_X su X. Procedendo come sopra, si può allora definire un grado su $\mathbb{R}^N$: se $\widetilde{\Omega}$ è un un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e $\tilde{f} : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua tale che $0 \notin \tilde{f}(\partial\widetilde{\Omega})$, si considera l'aperto limitato $\Omega = \varphi^{-1}(\widetilde{\Omega})$ di X, la funzione continua $f : \overline{\Omega} \to X$ definita da $f = \varphi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi$ e si definisce

$$d(\tilde{f}, \widetilde{\Omega}) = d_X(f, \Omega)\,.$$

Essendo tale d un grado su $\mathbb{R}^N$, deve essere $d = d_{\mathbb{R}^N}$. Quindi

$$d_X(f, \Omega) = d_{\mathbb{R}^N}(\tilde{f}, \widetilde{\Omega})\,.$$

2 Il grado di Leray - Schauder

Siano X uno spazio di Banach e $\Omega \subseteq X$ un sottoinsieme aperto. Diremo che una funzione continua $g : \overline{\Omega} \to X$ è **completamente continua** se manda insiemi limitati in insiemi relativamente compatti; equivalentemente, se presa una successione $(x_n)_n$ limitata, la successione $(g(x_n))_n$ ha una sottosuccessione convergente.

Denotiamo con $K(\overline{\Omega}, X)$ l'insieme delle funzioni $f : \overline{\Omega} \to X$ del tipo $f = I - g$, con $g : \overline{\Omega} \to X$ completamente continua.

Theorem 1 (esistenza e unicità del grado) *Esiste ed è unica una funzione d che associa ad ogni aperto limitato $\Omega \subseteq X$ e ad ogni funzione $f \in K(\overline{\Omega}, X)$ tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$ un numero reale*

$$d(f, \Omega)\,,$$

con le seguenti tre proprietà:

• *A1 (normalizzazione). Se $0 \in \Omega$, allora $d(I, \Omega) = 1$;*

• *A2 (additività). Se Ω_1 e Ω_2 sono due sottoinsiemi aperti disgiunti di Ω tali che $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, allora $d(f, \Omega) = d(f, \Omega_1) + d(f, \Omega_2)$;*

• *A3 (invarianza per omotopie). Se $F \in K(\overline{\Omega} \times [0,1], X)$ è tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0,1])$, allora $d(F(\cdot, \lambda), \Omega)$ è indipendente da $\lambda \in [0,1]$.*

Inoltre, il valore di $d(f, \Omega)$ è sempre un intero e valgono le seguenti proprietà:

• *P1 (excisione). Se Ω_1 è un sottoinsieme aperto di Ω tale che $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$, allora $d(f, \Omega) = d(f, \Omega_1)$.*

• *P2 (esistenza). Se $d(f, \Omega) \neq 0$, allora esiste un $x \in \Omega$ tale che $f(x) = 0$.*

• *P3 (di Rouché). Se $\max\limits_{\partial\Omega} \|f - g\| < \min\limits_{\partial\Omega} \|f\|$, allora $d(f, \Omega) = d(g, \Omega)$.*

Contrariamente a quanto fatto per il grado di Brouwer, dimostreremo prima l'esistenza e solo in seguito l'unicità.

Lemma 1 *Se $f \in K(\overline{\Omega}, X)$, allora $f(\partial\Omega)$ è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Sia $(y_n)_n$ una successione in $f(\partial\Omega)$ tale che $y_n \to y$ in X. Vogliamo dimostrare che $y \in f(\partial\Omega)$. Prendiamo $(x_n)_n$ in $\partial\Omega$ tale che $f(x_n) = y_n$. Essendo $f(x_n) = x_n - g(x_n)$, con g completamente continua, esiste una sottosuccessione per cui $(g(x_{n_k}))_k$ converge: si avrà $g(x_{n_k}) \to z$, per un certo $z \in X$. Allora

$$x_{n_k} = y_{n_k} + g(x_{n_k}) \to y + z\,,$$

e $y + z \in \partial\Omega$, essendo $\partial\Omega$ un insieme chiuso. ■

Poniamo

$$\mu := \inf_{\partial\Omega} \|f\| = \mathrm{dist}(0, f(\partial\Omega))\,.$$

Per il Lemma 1, si ha che $\mu > 0$.

Lemma 2 *Se $f \in K(\overline{\Omega}, X)$, esiste un sottospazio X_1 di X, avente dimensione finita, ed esiste una funzione continua $g_1 : \overline{\Omega} \to X_1$ tale che, ponendo $f_1 = I - g_1$, si ha*

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|f - f_1\| < \frac{\mu}{3}\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon \in]0, \mu/3[$. Per ogni $y \in g(\overline{\Omega})$, consideriamo la palla $B_\varepsilon(y)$. Allora

$$\overline{g(\overline{\Omega})} \subseteq \bigcup_y B_\varepsilon(y)\,.$$

Essendo $g(\overline{\Omega})$ relativamente compatto, esiste un sottoricoprimento finito:

$$\overline{g(\overline{\Omega})} \subseteq \bigcup_{k=1}^m B_\varepsilon(y_k)\,.$$

Sia X_1 il sottospazio generato da $\{y_1, \dots, y_m\}$. Defniamo le funzioni

$$\varphi_k(y) = \max\{0\,,\, \varepsilon - \|y - y_k\|\}\,,$$

$$\psi_k(y) = \frac{\varphi_k(y)}{\sum_{k=1}^m \varphi_k(y)}\,.$$

Definiamo $g_1 : \overline{\Omega} \to X_1$ in questo modo:

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^m \psi_k(g(x)) y_k\,.$$

Si vede facilmente che si tratta di una funzione continua, e si ha:

$$\|g(x) - g_1(x)\| \le \varepsilon\,,$$

per ogni $x \in \overline{\Omega}$. ■

Ricordiamo che nello spazio finito-dimensionale X_1 è definito il grado, che indicheremo con d_{X_1}.

Una volta determinate le funzioni $g_1 : \overline{\Omega} \to X_1$ e $f_1 = I - g_1$, consideriamo le loro restrizioni all'insieme $\overline{\Omega} \cap X_1$: la denotiamo con $\tilde{g}_1 : \overline{\Omega} \cap X_1 \to X_1$ e $\tilde{f}_1 : \overline{\Omega} \cap X_1 \to X_1$, per cui si ha $\tilde{f}_1 = I - \tilde{g}_1$.

Vediamo che $0 \notin \tilde{f}_1(\partial(\Omega \cap X_1))$. Infatti, se $x \in \partial(\Omega \cap X_1)$, allora $x \in \partial\Omega$ e

$$\|\tilde{f}_1(x)\| \geq \|f(x)\| - \|f(x) - \tilde{f}_1(x)\| > \mu - \frac{\mu}{3} = \frac{2}{3}\mu > 0\,.$$

Siamo ora pronti a definire il grado di f su Ω: porremo

$$d(f, \Omega) = d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1)\,.$$

Verifichiamo innanzitutto che si tratta di una buona definizione. Siano X_2 un sottospazio di dimensione finita, $g_2 : \overline{\Omega} \to X_2$ e $f_2 = I - g_2$ delle funzioni che soddisfino, allo stesso modo del sottospazio X_1 e delle funzioni $g_1 : \overline{\Omega} \to X_1$ e $f_1 = I - g_1$, alle condizioni del lemma, per cui

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|f - f_2\| < \frac{\mu}{3}\,.$$

Denotiamo con $\tilde{g}_2 : \overline{\Omega} \cap X_2 \to X_2$ e $\tilde{f}_2 : \overline{\Omega} \cap X_2 \to X_2$ le loro restrizioni all'insieme $\overline{\Omega} \cap X_2$, per cui si ha $\tilde{f}_2 = I - \tilde{g}_2$. Come sopra, si vede che

$$x \in \partial(\Omega \cap X_2) \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{f}_2(x)\| > \frac{2}{3}\mu > 0\,,$$

per cui $0 \notin \tilde{f}_2(\partial(\Omega \cap X_2))$. Dobbiamo far vedere che

$$d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1) = d_{X_2}(\tilde{f}_2, \Omega \cap X_2). \tag{1}$$

Consideriamo lo spazio X_0 generato da $X_1 \cup X_2$. Definiamo le funzioni

$$\hat{g}_1 : \overline{\Omega} \cap X_0 \to X_0\,, \qquad \hat{g}_2 : \overline{\Omega} \cap X_0 \to X_0\,,$$

definite da $\hat{g}_1(x) = g_1(x)$ e $\hat{g}_2(x) = g_2(x)$, per ogni $x \in \overline{\Omega} \cap X_0$. Allo stesso modo, definiamo le funzioni

$$\hat{f}_1 : \overline{\Omega} \cap X_0 \to X_0\,, \qquad \hat{f}_2 : \overline{\Omega} \cap X_0 \to X_0\,,$$

definite da $\hat{f}_1(x) = f_1(x)$ e $\hat{f}_2(x) = f_2(x)$, per ogni $x \in \overline{\Omega} \cap X_0$. Pertanto, si ha che $\hat{f}_1 = I - \hat{g}_1$ e $\hat{f}_2 = I - \hat{g}_2$. Si vede come sopra che

$$x \in \partial(\Omega \cap X_0) \quad \Rightarrow \quad \|\hat{f}_1(x)\| > \frac{2}{3}\mu > 0 \quad \text{e} \quad \|\hat{f}_2(x)\| > \frac{2}{3}\mu > 0\,,$$

per cui $0 \notin \hat{f}_1(\partial(\Omega \cap X_0))$ e $0 \notin \hat{f}_2(\partial(\Omega \cap X_0))$. Dimostriamo allora che

$$d_{X_0}(\hat{f}_1, \Omega \cap X_0) = d_{X_0}(\hat{f}_2, \Omega \cap X_0). \tag{2}$$

A tal scopo, consideriamo la funzione $F : (\overline{\Omega} \cap X_0) \times [0,1] \to X_0$ definita da

$$F(x,\lambda) = (1-\lambda)\hat{f}_1(x) + \lambda \hat{f}_2(x)\,.$$

Se $x \in \partial(\Omega \cap X_0)$, allora

$$\begin{aligned}\|F(x,\lambda)\| &\geq \|\hat{f}_1(x)\| - \lambda\|\hat{f}_1(x) - \hat{f}_2(x)\| > \frac{2}{3}\mu - \|\hat{f}_1(x) - \hat{f}_2(x)\| \\ &\geq \frac{2}{3}\mu - \|\hat{f}_1(x) - f(x)\| - \|f(x) - \hat{f}_2(x)\| > \frac{2}{3}\mu - \frac{\mu}{3} - \frac{\mu}{3} = 0\,.\end{aligned}$$

L'uguaglianza (2) segue quindi dalla proprietà di invarianza per omotopie del grado.

Vogliamo ora dimostrare che

$$d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1) = d_{X_0}(\hat{f}_1, \Omega \cap X_0)\,, \qquad d_{X_2}(\tilde{f}_2, \Omega \cap X_2) = d_{X_0}(\hat{f}_2, \Omega \cap X_0)\,,$$

da cui segue immediatamente (1), vista la (2). Dimostriamo la prima, essendo la seconda ad essa analoga. Identifichiamo X_0 con $\mathbb{R}^N$: se $x \in X_0$, scriviamo $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Identifichiamo X_1 con $\mathbb{R}^M$, ossia

$$X_1 \approx \{x \in \mathbb{R}^N : x_{M+1} = \ldots = x_N = 0\}\,.$$

Ricordiamo che $\hat{g}_1(x) \in X_1$, per ogni $x \in \overline{\Omega} \cap X_0$. Ragionando come nella dimostrazione del teorema sul grado in dimensione finita, è possibile trovare una funzione polinomiale $\hat{q}_1 : \overline{\Omega} \cap X_0 \to X_0$ tale che $\hat{q}_1(x) \in X_1$, per ogni $x \in \overline{\Omega} \cap X_0$ e, posto $\hat{p}_1 = I - \hat{q}_1 : \overline{\Omega} \cap X_0 \to X_0$, si abbia che 0 è un valore regolare per $\hat{p}_1$ e $\max\limits_{\overline{\Omega} \cap X_0} \|\hat{f}_1 - \hat{p}_1\| < \min\limits_{\partial(\Omega \cap X_0)} \|\hat{f}_1\|$. Allora,

$$d_{X_0}(\hat{f}_1, \Omega \cap X_0) = d_{X_0}(\hat{p}_1, \Omega \cap X_0) = \sum_{x \in \hat{p}_1^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_{\hat{p}_1}(x))\,.$$

Definiamo $\tilde{q}_1 : \overline{\Omega} \cap X_1 \to X_1$ tale che $\tilde{q}_1(x) = \hat{q}_1(x)$, per ogni $x \in \overline{\Omega} \cap X_1$ e poniamo $\tilde{p}_1 = I - \tilde{q}_1 : \overline{\Omega} \cap X_1 \to X_1$. Allora

$$d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1) = d_{X_1}(\tilde{p}_1, \Omega \cap X_1) = \sum_{u \in \tilde{p}_1^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_{\tilde{p}_1}(u))\,.$$

Siccome $\hat{q}_1(x) \in X_1$, si ha

$$\hat{p}_1(x) = (\hat{p}_1^1(x), \ldots, \hat{p}_1^M(x), x_{M+1}, \ldots, x_N)\,.$$

Allora

$$
\begin{aligned}
x \in \hat{p}_1^{-1}(0) \quad &\Leftrightarrow \quad (\hat{p}_1^1(x), \ldots, \hat{p}_1^M(x), x_{M+1}, \ldots, x_N) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x_1, \ldots, x_M) \in \tilde{p}_1^{-1}(0)\,, \\ x_{M+1} = \ldots = x_N = 0\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Inoltre,

$$
J_{\hat{p}_1}(x) = \det \begin{pmatrix} I - \left(\frac{\partial \hat{q}_1^i}{\partial x_j}(x)\right) & \ldots \\ & \\ 0 & I \end{pmatrix}
$$

Quindi, se $x \in \hat{p}_1^{-1}(0)$, allora

$$
\begin{aligned}
J_{\hat{p}_1}(x) &= \det \left(I - \left(\frac{\partial \hat{q}_1^i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_M, 0, \ldots, 0) \right) \right) \\
&= \det \left(I - \left(\frac{\partial \tilde{q}_1^i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_M) \right) \right) \\
&= J_{\tilde{p}_1}(x_1, \ldots, x_M)\,.
\end{aligned}
$$

Ponendo $u = (x_1, \ldots, x_M)$, abbiamo quindi

$$
\sum_{x \in \hat{p}_1^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_{\hat{p}_1}(x)) = \sum_{u \in \tilde{p}_1^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_{\tilde{p}_1}(u))\,.
$$

In conclusione,

$$
d_{X_0}(\hat{f}_1, \Omega \cap X_0) = d_{X_0}(\hat{p}_1, \Omega \cap X_0) = d_{X_1}(\tilde{p}_1, \Omega \cap X_1) = d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1)\,,
$$

che è quanto volevasi dimostrare. Abbiamo così verificato che la definizione data del grado è una buona definizione.

Sono da dimostrare ora le proprietà A1, A2 e A3. Vediamo A1: se $0 \in \Omega$, allora $0 \in \Omega \cap X_1$ e quindi

$$
d(I, \Omega) = d_{X_1}(I, \Omega \cap X_1) = 1\,.
$$

Vediamo A2: siano Ω_1 e Ω_2 due sottoinsiemi aperti disgiunti di Ω tali che $0 \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, Usando il Lemma 2, possiamo prendere il sottospazio X_1 per definire tutti e tre i gradi

$$
\begin{aligned}
d(f, \Omega) &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1)\,, \\
d(f, \Omega_1) &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_1 \cap X_1)\,, \\
d(f, \Omega_2) &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_2 \cap X_1)\,.
\end{aligned}
$$

Essendo $\Omega_1 \cap X_1$ e $\Omega_2 \cap X_1$ aperti disgiunti di $\Omega \cap X_1$, si ha

$$\begin{aligned} d(f, \Omega) &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1) \\ &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_1 \cap X_1) + d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_2 \cap X_1) \\ &= d(f, \Omega_1) + d(f, \Omega_2) \,. \end{aligned}$$

Infine, vediamo A3: sia $F \in K(\overline{\Omega} \times [0,1], X)$ tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0,1])$. Per i Lemma 2 si può trovare un sottospazio X_1 ed una funzione continua $G_1 : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X_1$ tale che, ponendo $F_1 = I - G_1$, risulta

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|F - F_1\| < \frac{1}{3}\mathrm{dist}(0, F(\partial\Omega \times [0,1])) \,.$$

Definendo $\tilde{F}_1 : (\Omega \cap X_1) \times [0,1] \to X_1$, la restrzione di F_1, si ha

$$d(F(\cdot, \lambda), \Omega) = d_{X_1}(\tilde{F}_1(\cdot, \lambda), \Omega \cap X_1).$$

Siccome $0 \notin \tilde{F}_1(\partial(\Omega \cap X_1 \times [0,1])$, il grado è indipendente da $\lambda \in [0,1]$.

Le proprietà P1 - P3 seguono facilmente dalle A1 - A3, come già visto nel caso finito-dimensionale.

Veniamo ora alla dimostrazione dell'unicità del grado. Indichiamo con d_X il grado sopra definito. Supponiamo che sia definito un grado d, e dimostriamo che deve essere $d = d_X$. Sia Ω un aperto limitato di X e $f \in K(\overline{\Omega}, X)$. Procedendo come sopra, per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo un sottospazio di dimensione finita X_1 e una funzione continua $g_1 : \overline{\Omega} \to X_1$ tale che, ponendo $f_1 = I - g_1$, si ha

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|f - f_1\| < \varepsilon \,.$$

Sia $K_\sharp(\overline{\Omega}, X)$ l'insieme delle funzioni $f : \overline{\Omega} \to X$ del tipo $f = I - g$, con $g : \overline{\Omega} \to X$ continua avente immagine contenuta in un sottospazio di dimensione finita. Da quanto sopra, considerando la topologia della convergenza uniforme, $K_\sharp(\overline{\Omega}, X)$ è denso in $K(\overline{\Omega}, X)$. Quindi, basterà dimostrare che $d(f, \Omega) = d_X(f, \Omega)$ per ogni $f \in K_\sharp(\overline{\Omega}, X)$.

Sia quindi $f \in K_\sharp(\overline{\Omega}, X)$, e sia X_1 un sottospazio di dimensione finita che contiene l'immagine di $g = I - f$. Su X_1 è univocamente definito un grado, che indichiamo con d_{X_1}.

Sia X_2 un sottospazio tale che $X = X_1 \oplus X_2$ Per ogni $x \in X$, scriveremo $x = x_1 + x_2$, dove $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$. Sia $F : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X$ la funzione definita da

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)[f(x_1) + x_2]$$

Vediamo che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0,1])$. Infatti, se $F(x, \lambda) = 0$, allora

$$\lambda(x_1 - g(x)) + (1 - \lambda) f(x_1) + x_2 = 0 \,.$$

Siccome sia $x_1 - g(x)$ che $f(x_1)$ appartengono a X_1, ne segue che deve essere $x_2 = 0$ e quindi $x = x_1$, da cui

$$\lambda(x - g(x)) + (1 - \lambda)f(x) = 0\,,$$

ossia $f(x) = 0$. Siccome $0 \notin f(\partial\Omega)$, si ha che $x \notin \partial\Omega$.

Sia $\hat{f} : \overline{\Omega} \to X$ definita da

$$\hat{f}(x) = f(x_1) + x_2 = x - g(x_1)\,.$$

Chiaramente, $\hat{f} \in K_\sharp(\overline{\Omega}, X)$. Da quanto visto sopra, usando l'invarianza per omotopie, si ha che

$$d(f, \Omega) = d(\hat{f}, \Omega)\,.$$

Fissato $\rho > 0$, sia

$$B^2_\rho = \{x \in X_2 : \|x\| < \rho\}\,,$$

e sia inoltre $\Omega_1 = \Omega \cap X_1$. Osserviamo che

$$\hat{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_1 \in X_1\,.$$

Per la proprietà di excisione,

$$d(\hat{f}, \Omega) = d(\hat{f}, \Omega_1 + B^2_\rho)\,.$$

Sia ora $\tilde{f}_1 : \overline{\Omega}_1 \to X_1$ definita da $\tilde{f}_1(x) = f(x)$. Si può verificare che $0 \notin \tilde{f}^{-1}(\partial\Omega_1)$. Poniamo allora

$$d(\tilde{f}_1, \Omega_1) = d(\hat{f}, \Omega_1 + B^2_\rho)\,,$$

con $\rho > 0$ arbitrario.

Si noti che ogni aperto limitato Ω_1 di X_1 si può ottenere come intersezione dell'aperto limitato $\Omega_1 + B^2_\rho$ di X con X_1, e ogni funzione continua $\tilde{f}_1 : \overline{\Omega}_1 \to X_1$ tale che $0 \notin \tilde{f}^{-1}(\partial\Omega_1)$ si può ottenere come sopra, a partire da una funzione $f \in K_\sharp(\overline{\Omega_1 + B^2_\rho}, X)$ tale che $0 \notin f^{-1}(\partial(\Omega_1 + B^2_\rho))$, ad esempio definendo $f(x) = \tilde{f}(x_1) + x_2$.

Resta pertanto definito $d(\tilde{f}_1, \Omega_1)$ per ogni aperto limitato Ω_1 di X_1 e ogni funzione continua $\tilde{f}_1 : \overline{\Omega}_1 \to X_1$ tale che $0 \notin \tilde{f}^{-1}(\partial\Omega_1)$. A questo punto, si può verificare che valgono le proprietà A1 - A3, per cui $d(\tilde{f}_1, \Omega_1)$ definisce un grado su X_1. Ma allora, per l'unicità,

$$d(\tilde{f}_1, \Omega_1) = d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_1)\,,$$

Ricordiamo ora che d_X è stato definito ponendo

$$d_X(f, \Omega) = d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1)\,.$$

Se ne conclude che

$$d_X(f, \Omega) = d(f, \Omega)\,,$$

e la dimostrazione è completa.

Il teorema di Brouwer ha il suo corrispettivo, con dimostrazione praticamente identica, che ora enunciamo.

Teorema di Schauder. *Se $g : X \to X$ è completamente continua ed esiste una palla chiusa $\overline{B}_R$ tale che*

$$g(\overline{B}_R) \subseteq \overline{B}_R\,,$$

allora esiste un $x \in \overline{B}_R$ tale che $g(x) = x$. Inoltre, se g non ha punti fissi su ∂B_R, allora

$$d(I - g, B_R) = 1\,.$$

3 Appendice
Sul teorema di Stone–Weierstrass

In questa sezione, supponiamo che E sia uno spazio metrico compatto. Indichiamo con $C(E)$ lo spazio delle funzioni continue $f : E \to \mathbb{R}$, dotato della norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(u)| : u \in E\}\,.$$

Ricordiamo che se $(f_n)_n$ è una successione che ha limite in $C(E)$, si dice che $(f_n)_n$ *converge uniformemente* in E. È ben noto che $C(E)$ è un'algebra, e che oltre alle usuali proprietà della norma, si ha anche la seguente:

$$\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty\,.$$

Si può dimostrare che, data una sottoalgebra A di $C(E)$, la sua chiusura $\overline{A}$ è ancora una sottoalgebra di $C(E)$.

Cominciamo con l'esporre il **Teorema di Dini**.

Teorema. *Se $(f_n)_n$ è una successione crescente di funzioni in $C(E)$ e $g \in C(E)$ è tale che $\lim_n f_n(t) = g(t)$, per ogni $t \in E$, allora $\lim_n f_n = g$, uniformemente in E.*

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni fissato $x \in E$, esiste un indice $n(x)$ tale che

$$m \ge n(x) \quad \Rightarrow \quad g(x) - f_m(x) \le \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Per la continuità, esiste un intorno aperto $U(x)$ di x tale che

$$u \in U(x) \quad \Rightarrow \quad |g(u) - g(x)| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad |f_{n(x)}(u) - f_{n(x)}(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Ne segue che, per ogni $u \in U(x)$, si ha $g(u) - f_{n(x)}(u) \leq \varepsilon$. Al variare di x in E, tali aperti $U(x)$ ricoprono E, ed essendo E compatto, possiamo trovare un suo sottoricoprimento finito $U(x_1), \dots, U(x_k)$. Sia $\bar{n} = \max\{n(x_1), \dots, n(x_k)\}$. Allora, per ogni $u \in E$, tale u appartiene a uno degli $U(x_i)$ e pertanto, se $n \geq \bar{n}$, si ha che

$$g(u) - f_n(u) \leq g(u) - f_{\bar{n}}(u) \leq g(u) - f_{n(x_i)}(u) \leq \varepsilon \, .$$

La dimostrazione è così conclusa. ■

Diremo che una sottoalgebra A *separa i punti* di E se, dati due punti distinti x e y di E, esiste una funzione f in A tale che $f(x) \neq f(y)$. Possiamo ora enunciare il **Teorema di Stone–Weierstrass**.

Teorema. *Se una sottoalgebra A di $C(E)$ contiene le funzioni costanti e separa i punti di E, allora $\overline{A} = C(E)$.*

Per poter dimostrare il teorema, iniziamo con il seguente risultato preliminare.

Lemma. *Esiste una successione $(p_n)_n$ di polinomi $p_n(t)$ che converge uniformemente alla funzione $\sqrt{t}$ nell'intervallo* $[0,1]$.

<u>Dimostrazione</u>. Definiamo p_n per ricorrenza, ponendo $p_0(t) \equiv 0$, e

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{t - p_n(t)^2}{2} \, .$$

Dimostriamo per induzione che $p_n(t) \leq \sqrt{t}$, per ogni $t \in [0,1]$. La disuguaglianza è sicuramente vera se $n = 0$. Supponiamo che valga per un certo n; allora

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = \sqrt{t} - p_n(t) - \frac{t - p_n(t)^2}{2} = \left(\sqrt{t} - p_n(t)\right)\left(1 - \frac{\sqrt{t} + p_n(t)}{2}\right) ,$$

ed essendo $\frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t)) \leq \sqrt{t} \leq 1$, si conclude che $p_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$, per ogni $t \in [0,1]$.

Ne segue immediatamente che $p_n(t) \leq p_{n+1}(t)$, per ogni $t \in [0,1]$, per cui la successione $(p_n)_n$ è crescente e limitata superiormente su $[0,1]$. Essa ha pertanto un limite $\lim_n p_n(t) = v(t)$, con $t \in [0,1]$. Passando al limite nell'uguaglianza della definizione della $(p_n)_n$ si ha che

$$v(t) = v(t) + \frac{t - v(t)^2}{2} \, ,$$

ed essendo $v(t) \geq 0$, per ogni $t \in [0,1]$, si conclude che $v(t) = \sqrt{t}$.

Per il teorema di Dini, la convergenza di $(p_n)_n$ a v è uniforme su $[0,1]$. ■

Esponiamo ora la dimostrazione del Teorema di Stone–Weierstrass, che verrà suddivisa in cinque passi.

Primo passo. Se $f \in \overline{A}$, allora $|f| \in \overline{A}$.

Infatti, se $(p_n)_n$ è la successione di polinomi trovata nel precedente Lemma, consideriamo le funzioni $g_n : E \to \mathbb{R}$, definite da

$$g_n(u) = \|f\|_\infty \, p_n\left(\frac{f(u)^2}{\|f\|_\infty^2}\right),$$

e notiamo che $|f| = \lim_n g_n$, uniformemente in E. Inoltre, siccome $\overline{A}$ contiene le costanti, le operazioni polinomiali mantengono le funzioni nella sottoalgebra, per cui si ha che $g_n \in \overline{A}$, per ogni n.

Secondo passo. Se $f, g \in \overline{A}$, allora $\inf\{f, g\} \in \overline{A}$ e $\sup\{f, g\} \in \overline{A}$.

Infatti, possiamo scrivere

$$\inf\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2}, \qquad \sup\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2},$$

e si conclude usando il primo passo.

Terzo passo. Dati due punti distinti x e y di E, e dati due numeri reali α e β, esiste una funzione f in A tale che $f(x) = \alpha$ e $f(y) = \beta$.

Per ipotesi, esiste una funzione $g \in A$ tale che $g(x) \neq g(y)$. Siccome A contiene le funzioni costanti, prendiamo $f \in A$ così definita:

$$f(u) = \alpha + (\beta - \alpha)\,\frac{g(u) - g(x)}{g(y) - g(x)}.$$

Quarto passo. Dati $\varepsilon > 0$, $x \in E$ e $f \in C(E)$, esiste una $g \in \overline{A}$ tale che $g(x) = f(x)$, e $g(u) \leq f(u) + \varepsilon$, per ogni $u \in E$.

Infatti, usando il terzo passo, per ogni fissato $z \in E$, esiste una funzione $h_z \in A$ tale che $h_z(x) = f(x)$ e $h_z(z) = f(z)$. Per la continuità, esiste quindi un intorno aperto $V(z)$ di z tale che, per ogni $u \in V(z)$, si ha $h_z(u) \leq f(u)+\varepsilon$. Al variare di z in E, tali aperti $V(z)$ ricoprono E, ed essendo E compatto, possiamo trovare un suo sottoricoprimento finito $V(z_1), \ldots, V(z_m)$. Definiamo $g = \inf\{h_{z_1}, \ldots, h_{z_m}\}$. Per il secondo passo, abbiamo che $g \in \overline{A}$. Inoltre, g verifica le condizioni richieste.

Quinto passo. Dati $\varepsilon > 0$ e $f \in C(E)$, esiste una $\varphi \in \overline{A}$ tale che $f(u) - \varepsilon \leq \varphi(u) \leq f(u) + \varepsilon$, per ogni $u \in E$.

Infatti, per il quarto passo, per ogni fissato $x \in E$ esiste una funzione $g_x \in \overline{A}$ tale che $g_x(x) = f(x)$ e $g_x(u) \leq f(u) + \varepsilon$, per ogni $u \in E$. Per la continuità, esiste un intorno aperto $U(x)$ di x tale che, per ogni $u \in V(x)$, si ha $g_x(u) \geq f(u) - \varepsilon$. Al variare di x in E, tali aperti $U(x)$ ricoprono E, ed essendo E compatto, possiamo trovare un suo sottoricoprimento finito $U(x_1), \ldots, U(x_k)$. Definiamo $\varphi = \sup\{g_{x_1}, \ldots, g_{x_k}\}$. Per il secondo passo, abbiamo che $\varphi \in \overline{A}$. Inoltre, φ verifica le condizioni richieste. ■

Come immediata conseguenza, abbiamo il seguente

Corollario. *Se E è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N$, ogni funzione continua $f : E \to \mathbb{R}$ è limite uniforme di una successione di funzioni polinomiali.*

Dimostrazione. È chiaro che l'algebra dei polinomi contiene le costanti. Inoltre, essa separa i punti: presi due punti distinti $x = (x_1, \ldots, x_N)$ e $y = (y_1, \ldots, y_N)$ di E, si ha che $x_i \neq y_i$ per almeno un indice i, e il polinomio $p(u_1, \ldots, u_N) = u_i$ è tale che $p(x) \neq p(y)$. ■