Tutorato di Analisi Matematica 1 – 2009/10 – N.9

key words: crescenza e derivate, teoremi di de l'Hôpital, approssimante lineare, formula di Taylor con il resto di Peano, formula di Taylor con il resto di Lagrange, funzioni convesse, studio di funzioni.

es. 1 Si provi che se $x \in]-2,0]$ allora

$$\log(2+x) \leq \frac{x}{2} + \log 2.$$

es. 2 Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Sia $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e per ogni $x \in [0,1]$ sia $|f'(x)| \leq 2$. Si provi che f è limitata e si determini la minima costante $C > 0$ tale che per ogni $x \in [0,1]$ valga $|f(x)| \leq C$.

es. 3 Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\sqrt{x}} - (\sqrt{x})^x, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2(e^{(\cos\frac{1}{x})-1} - 1),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\arctan x} - e^{\frac{\pi}{2}}}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \arctan x}{x^3},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{\sin^2 x}{x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2 - \sin^2 x}}{x\log(x+1)},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 \log(1 + \frac{1}{x}) - x.$$

es. 4 Si determini l'approssimante lineare delle funzioni qui sotto elencate relativamente ai punti a fianco indicati

$$f(x) = \sin x, \qquad x_0 = 0,$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad x_0 = 1,$$

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad x_2 = 0.$$

es. 5 Si scriva la formula di Taylor con il resto di Peano e la formla di Taylor con il resto di Lagrange per le funzioni qui sotto elencate, nei punti e rispetto all'ordine a fianco riportato

$$f(x) = x\cos x, \qquad x_0 = 0,\ n = 3,$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad x_0 = 1,\ n = 3,$$

$$f(x) = \sin x - \arcsin x, \qquad x_0 = 0,\ n = 3,$$

$$f(x) = e^{\sin x} - e^x, \qquad x_0 = 0,\ n = 2.$$

es. 6 Si determini il valore di $\sqrt[10]{e}$ con un errore inferiore a 10^{-9}.

es. Sia
$$f(x) = \frac{x\log(x+1)}{x+1}.$$
Si determini il valore di $f(1/2)$ con un errore inferiore a 10^{-2}.

es. Sia
$$f(x) = (x+1)e^{x^2-x}.$$
Si stimi, con un errore inferiore a 10^{-2}, la differenza tra i valori assunti da f nei punti in cui si annulla la sua derivata prima.

es. 7 Per $\alpha \in]0,1[$ si consideri la funzione
$$f_\alpha\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \max\{\alpha x^3,\ \frac{1-\alpha}{x^2}\}.$$
Indicato con $t(\alpha) = \min_{x>0} f_\alpha(x)$, si calcoli $\bar{t} = \max_{\alpha\in\,]0,1[}\, t(\alpha)$.

es. Si determini, al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$, il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione
$$\log|x| + \lambda x + 1 = 0.$$

es. 8 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia f_n una funzione convessa definita su $\mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia
$$\bar{f}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$
Si provi che $\bar{f}$ è convessa.

es. 9 Sia $f\ :]0,1[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e si supponga che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Si provi che f non è convessa sull'intervallo $]0,1[$.

es. 10 Sia $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$, convessa. Si provi che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale
$$f'(x) \le f(x+1) - f(x) \le f'(x+1).$$

es. 11 Sia $f\ :\ [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Si provi che:
i) se $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
ii) se $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ ed f non è costante allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
iii) se f è superiormente limitata allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf_{x\in[0,+\infty[} f$.

es. 12 Sia $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si supponga che $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x = 0$ e che $\lim x \to -\infty f(x) - 2x = 1$. Si provi che
i) f ha minimo assoluto;
ii) esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $f'(\xi) = 0$ (sugg.: usare il teor. di Fermat);
iii) $]-1,2[\subseteq f'(\mathbb{R})$ (sugg.: usare il teor. di Lagrange);
vi) se f è convessa allora $f'(\mathbb{R}) \subseteq [-1,2]$.

es. 13 Si studino le seguenti funzioni, determinandone dominio, punti di continuità e derivabilità, eventuali simmetrie, segno, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, derivata prima, crescenza e decrescenza, massimi e minimi, derivata seconda, concavità, convessità e flessi, e disegnandone un abbozzo di grafico.
$$f(x) = \frac{x\log(x+1)}{x+1}, \qquad f(x) = (x+1)e^{x^2-x},$$
$$f(x) = (x^2-1)\log(x-1) + \frac{x^2}{2} - x, \qquad f(x) = \sqrt[5]{x(x^2-1)^2},$$

$$f(x) = \frac{\log^2 x}{x} \qquad\qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2}e^{-x}$$

$$f(x) = x^2 + x + |\log(1-x)|, \qquad\qquad f(x) = (x^2-4)e^{|x|},$$

$$f(x) = \log|\log(\sin x)|, \qquad\qquad f(x) = xe^{-|x+1|}.$$

es. 14 Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione convessa.

i) Si studi la funzione $f(x) = (2x + x^2)e^x$.

ii) Si dica, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione $g_\lambda(x) = -\lambda + (2x + x^2)e^x = 0$.

iii) Si determini per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $h_\lambda(x) = -\lambda x + x^2 e^x$ è strettamente crescente.

es. 15 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Si provi che:

i) se x_0, $x_1 \in \mathbb{R}$ con $x_0 < x_1$ e se $f(x_0) \le f(x_1)$ allora f è crescente su $[x_1, +\infty[$;

ii) se non esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che f sia crescente su $[\bar{x}, +\infty[$ allora f è decrescente su tutto $\mathbb{R}$;

iii) se x_0, $x_1 \in \mathbb{R}$ con $x_0 < x_1$ e se $f(x_0) = f(x_1)$ allora f è costante su $[x_0, +\infty[$ oppure $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.