Tutorato di Analisi Matematica 1 – 2009/10 – N.6

Key words: sottosuccessioni, teorema di Weierstrass, successioni di Cauchy, spazi metrici completi, completezza di $\mathbb{R}$, caratterizzazione dei chiusi tramite le successioni, insiemi sequenzialmente compatti, caratterizzazione dei compatti di $\mathbb{R}$, funzioni reali di variabile reale, funzioni monotone, funzioni limitate, funzioni pari o dispari, funzioni periodiche, limiti di funzioni, rapporto tra limiti di funzioni e limiti di successioni.

es. 1 Sia $E = (\bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{4n}, \frac{1}{4n-1}]) \cup \{0\}$.

i) Dire se esiste ed eventualmente trovare una successione a valori in E che non ha sottosuccessioni convergenti ad un punto di E.

ii) Dire se esiste ed eventualmente trovare una successione a valori in E che non converge ad un punto di E ma che ha una sottosuccessione convergente ad un punto di E.

iii) Determinare due successioni $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ a valori in E tali che

$$\lim_n |x_n - y_n| = \sup_{x,y\in E} |x - y|.$$

es. 2 Sia $\{a_n\}_n$ una successione strettamente positiva e limitata. Sia $\{b_n\}_n$ una successione convergente a zero.

i) È vero che $\lim_n a_n^{b_n} = 1$?

ii) È vero che se per ogni n si ha $a_n \geq 1/n$ allora $\lim_n a_n^{b_n} = 1$?

iii) È vero che se per ogni n si ha $a_n \geq 1/n$ e $b_n < 1/n$ allora $\lim_n a_n^{b_n} = 1$?

es. 3 Si consideri la seguente successione (definita per ricorrenza)

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \frac{1}{4}[\\ x_{n+1} = x_n^2 + x_0 \end{cases}.$$

i) Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $x_n \in [0, \frac{1}{2}[$.

ii) Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $x_n < x_{n+1}$.

iii) Provare che esiste $\lim_n x_n$ e calcolarne il valore.

es. 4 Si consideri la seguente successione (definita per ricorrenza)

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{4} \\ a_{k+1} = \frac{1}{4} + \frac{a_k}{2} \end{cases}.$$

i) Si provi che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $a_k < \frac{1}{2}$.

ii) Si provi che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $a_k < a_{k+1}$.

iii) Si calcoli $\lim_k a_k$.

iv) (Solo per i fisici) si determini il carattere della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1}}$.

es. 5 Dato l'insieme $\mathcal{S}$ delle successioni a valori in $\mathbb{R}$ che siano limitate e date $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathcal{S}$, si pone

$$\delta((a_n)_n, (b_n)_n) = \inf_n \{ \sup_{k\geq n} \{|a_k - b_k|\}\}.$$

La coppia $(\mathcal{S}, \delta)$ è uno spazio metrico completo?

es. 6 Siano $A,\ B \subset \mathbf{R}^2$. Definiamo
$$d(A,B) = \inf\{|x-y|\ :\ x \in A,\ y \in B\}.$$

i) Si trovi un esempio per A e B tali che $d(A,B)) = 0$ e $A \cap B = \emptyset$;

ii) si provi che se $d(A,B) = 0$ allora esistono due successioni $(x_n)_n$ in A e $(y_n)_n$ in B tali che $\lim_n |x_n - y_n| = 0$;

iii) si provi che se A è compatto, B è chiuso e $d(A,B) = 0$ allora $A \cap B \neq \emptyset$;

iv) per il risultato del punto *iii)* basta che A sia chiuso?

es. 7 Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R}\ :\ \exists\, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ p < 2q,\ p \text{ pari},\ q \text{ dispari},\ x = \frac{p}{q}\}.$$

i) Si calcolino $\inf E$ e $\sup E$.
ii) Si costruisca una successione $(x_n)_n$ a valori in E con $\lim\limits_n x_n = \sup E$.
iii) Si determinino l'interno e la chiusura di E.
iv) È vero che ogni elemento di E è limite di una successione a valori in E?
v) È vero che per ogni successione a valori in E che abbia limite, il valore del limite è un punto di E?
vi) È vero che ogni successione a valori in E ha una sottosuccessione convergente ad un punto della chiusura di E?

es. 8 Si calcolino i seguenti limiti
$$\lim_n \frac{\log^2 n + \log^2(n+1) + \cdots + \log^2(n^2)}{n^2}, \qquad \lim_n \frac{\sqrt[4]{n^4+1} - n}{\sin \frac{1}{n}},$$
$$\lim_n \frac{\cos(\sin \frac{1}{n}) - 1}{\log(\cos \frac{1}{n})}, \qquad \lim_n \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}\binom{3n}{n}}.$$

es. 9 Si calcolino i seguenti limiti
$$\lim_{x \to 0} \frac{x \log x}{1 - \cos x}, \qquad \lim_{x \to +\infty} x(\sqrt[3]{x^3+1} - x).,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^x - e^{x \log(\log x)}}{x}, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 \sqrt{x}(e^{1/x^2} - e^{1/x^3}).$$