Tutorato di Analisi Matematica 1 – 2009/10 – N.5

Key words: successioni monotone, successione $(1+1/n)^n$, definizione del numero e, potenze con esponente reale, funzione esponenziale, funzione logaritmo, logaritmi naturali, limiti fondamentali riguardanti l'esponenziale e il logaritmo, teoremi di Cesàro.

es. 1) Sia $(x_n)_n$ una successione reale convergente.

i) Si provi che per ogni $(y_n)_n$ successione reale limitata, la successione $(x_n y_n)_n$ è limitata.

ii) Si provi che se per ogni $(y_n)_n$ successione reale limitata, la successione $(x_n y_n)_n$ è convergente, allora la successione $(x_n)_n$ tende a 0.

es. 2) Sia $(x_n)_n$ una successione in $[0,+\infty[$.

i) Si provi che se $\lim_n x_n = 0$ allora $(x_n)_n$ è limitata.

ii) (Solo per i fisici) si usi il punto precedente per provare che se $\sum_n x_n$ è convergente allora anche $\sum_n x_n^2$ è convergente.

es. 3) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{\sqrt{n}-2\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}+1}, \qquad \lim_n \frac{n^2+n^3}{e^{\sqrt{n}}},$$

$$\lim_n (1+\sin(\frac{1}{n}))^{\sqrt{n}\cos n}, \qquad \lim_n n(e^{\frac{1}{n^2}} - e^{\frac{1}{n\log n}}),$$

$$\lim_n (\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}), \qquad \lim_n (\log(n+1))^2 - (\log n)^2,$$

$$\lim_n \frac{e^{-n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}, \qquad \lim_n (1+2+\cdots+n)^{1/n},$$

$$\lim_n (\cos n \sin n)^n, \qquad \lim_n (\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}})^n,$$

$$\lim_n (1+\sin\frac{1}{n})^{n\sqrt{n}}, \qquad \lim_n (1+8+\cdots+n^3)^{1/n},$$

$$\lim_n e^{\sqrt{\log n}}(\log(n^2+1)-\log(n^2)), \qquad \lim_n \frac{1+\sqrt{2}+\ldots\sqrt{n}}{n},$$

$$\lim_n n\sin(\sqrt[4]{n^4+1}-n), \qquad \lim_n (1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}})^{\frac{1}{(\log n)^2}}.$$

$$\lim_n \sqrt[n]{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}, \qquad \lim_n \frac{\sqrt{n+n^2}-n}{\sqrt[3]{n+n^3}-n},$$

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\cdots\cdot 2^n}}{n!}, \qquad \lim_n n(1-\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}),$$

$$\lim_n \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n}, \qquad \lim_n (n^{\frac{1}{n}}-1)n.$$