

## Tutorato di Analisi Matematica 1 – 2009/10 – N.1

**Key words:** numeri reali, assiomi dei numeri reali, assioma di separazione, massimo, minimo, maggiorante, minorante, estremo superiore, estremo inferiore, caratterizzazione dell'estremo superiore e inferiore, valore assoluto.

**esercizio 1)** Usando gli assiomi del campo reale provare le seguenti proprietà:

- (unicità dell'elemento neutro per l'addizione) supponiamo che  $0$  e  $\tilde{0}$  siano due elementi neutri per l'addizione. Provare che  $0 = \tilde{0}$ .
- (Unicità dell'opposto) supponiamo che  $a'$  e  $a''$  siano due opposti dello stesso elemento  $a$ . Provare che  $a' = a''$ .
- Provare che se  $-a$  è l'opposto di  $a$  allora  $a$  è l'opposto di  $-a$ .
- Provare che per ogni  $a \in \mathbb{R}$  si ha  $a \cdot 0 = 0$ .
- Provare che se  $a \cdot b = 0$  allora  $a = 0$  oppure  $b = 0$ .
- Provare che l'opposto di  $a \cdot b$  è  $(-a) \cdot b$ .

**esercizio 2)** Usando gli assiomi del campo reale ed eventualmente i risultati dell'esercizio precedente provare le seguenti proprietà:

- se  $a \geq 0$  allora  $-a \leq 0$ .
- Se  $a \geq b$  allora  $a - b \geq 0$ .
- Se  $a \geq b$  e  $c \leq 0$  allora  $ac \leq bc$ .
- Provare che per ogni  $a \in \mathbb{R}$  si ha  $a^2 \geq 0$ .

**esercizio 3)** Si provi che vale:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

**esercizio 4)** Si risolvano le seguenti disequazioni:

$$|3x - 1| > |x + 2|, \quad \frac{2}{x + 1} \geq 7, \quad 3x - 1 < 5x + 3 < 2|x| + 5.$$

**esercizio 5)** Si provi che se il minimo dell'insieme  $E \subseteq \mathbb{R}$  esiste, esso è unico.

**esercizio 6)** Trovare estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ 2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, & A_2 &= \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \\ A_3 &= \left\{ \frac{n^2}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}, & A_4 &= \left\{ \frac{x+1}{x-2} : x \in \mathbb{R} \wedge x > 2 \right\} \\ A_5 &= \left\{ \frac{1}{|x|} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge -2 \leq x \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

**esercizio 7)** Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A$  e  $B$  non vuoti. Supponiamo che per ogni  $a \in A$  si abbia  $a \geq 0$  e per ogni  $b \in B$  si abbia  $b \geq 0$ . Sia  $\alpha = \inf A$  e  $\beta = \inf B$ . Determinare  $\inf C$ , dove  $C = \{a \cdot b : a \in A \wedge b \in B\}$ .