

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito A - Trieste, 28 gennaio 2011

**Esercizio 1.** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\log(1 + 2x))}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{x+1} - x^x}{x}, \quad \lim_n \frac{n^2}{\sqrt[n]{1 + 2^4 + 3^6 + \dots + n^{2n}}}.$$

**Esercizio 2.**

- i) Si studi la funzione  $f(x) = e^x(x^3 + 2x^2)$ .
- ii) Al variare di  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$  si dica quante sono e che segno hanno le soluzioni dell'equazione  $f(x) - \lambda = 0$ , dove  $f$  è la funzione del punto precedente.
- iii) Si determinino i valori di  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$  tali che la funzione  $g(x) = e^x(x^3 - x^2 + 2x - 2) - \lambda x$  sia strettamente monotona su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continua. Si provi che:

- i) se esistono finiti  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  allora  $f$  è limitata;
- ii) se  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  allora  $f$  non può essere suriettiva.
- iii) se  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  allora  $f$  non può essere convessa.

**Esercizio 4. (LT in Fisica)**

- i) Si determini il comportamento delle seguenti serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\log n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n}}$ .
- ii) Si calcoli il seguente integrale indefinito:  $\int x \log(x^2 + 1) dx$ .

**Esercizio 4. (LT in Matematica)** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua

- i) Si dia un esempio di  $f$  per cui  $f(\mathbb{R})$  è aperto e non chiuso e un esempio per cui lo stesso insieme è chiuso e non aperto.
- ii) Si dimostri che se  $C$  è limitato anche  $f(C)$  è limitato.
- iii) Si dimostri che se  $C$  è chiuso anche  $f^{\leftarrow}(C)$  è chiuso.

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito B - Trieste, 28 gennaio 2011

**Esercizio 1.** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan x)}{\arcsin 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-x)^{-x} - (2-x)^{1-x}}{x}, \quad \lim_n \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}.$$

**Esercizio 2.**

- i) Si studi la funzione  $f(x) = e^x(x^3 - 2x^2)$ .
- ii) Al variare di  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$  si dica quante sono e che segno hanno le soluzioni dell'equazione  $f(x) - \lambda = 0$ , dove  $f$  è la funzione del punto precedente.
- iii) Si determinino i valori di  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$  tali che la funzione  $g(x) = e^x(x^3 - 5x^2 + 10x - 10) - \lambda x$  sia strettamente monotona su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continua. Si provi che:

- i) se  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  allora  $f$  è inferiormente limitata;
- ii) se  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  allora  $f$  non può essere iniettiva.
- iii) se  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  allora  $f$  non può essere convessa.

**Esercizio 4. (LT in Fisica)**

- i) Si determini il comportamento delle seguenti serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\log n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)}{\log n}$ .
- ii) Si calcoli il seguente integrale indefinito:  $\int x(\log x)^2 dx$ .

**Esercizio 4. (LT in Matematica)** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua

- i) Si dia un esempio di  $f$  per cui  $f(\mathbb{R})$  è aperto e non chiuso e un esempio per cui lo stesso insieme è chiuso e non aperto.
- ii) Si dimostri che se  $C$  è limitato anche  $f(C)$  è limitato.
- iii) Si dimostri che se  $C$  è chiuso anche  $f^{-1}(C)$  è chiuso.

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito C - Trieste, 28 gennaio 2011

**Esercizio 1.** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\log(1+x))}{\sin 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)^{x+1} - (x+1)^x}{x}, \quad \lim_n \frac{n^2}{\sqrt[n]{1+2^4+3^6+\dots+n^{2n}}}.$$

**Esercizio 2.**

- i) Si studi la funzione  $f(x) = e^x(x^3 + 2x^2)$ .
- ii) Al variare di  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$  si dica quante sono e che segno hanno le soluzioni dell'equazione  $f(x) - \lambda = 0$ , dove  $f$  è la funzione del punto precedente.
- iii) Si determinino i valori di  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$  tali che la funzione  $g(x) = \lambda x - e^x(x^3 - x^2 + 2x - 2)$  sia strettamente monotona su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continua. Si provi che:

- i) se esistono finiti  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  allora  $f$  è limitata;
- ii) se  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  allora  $f$  non può essere suriettiva.
- iii) se  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  allora  $f$  non può essere convessa.

**Esercizio 4. (LT in Fisica)**

- i) Si determini il comportamento delle seguenti serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\log n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n}}$ .
- ii) Si calcoli il seguente integrale indefinito:  $\int x \log(x^2 + 1) dx$ .

**Esercizio 4. (LT in Matematica)** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua

- i) Si dia un esempio di  $f$  per cui  $f(\mathbb{R})$  è aperto e non chiuso e un esempio per cui lo stesso insieme è chiuso e non aperto.
- ii) Si dimostri che se  $C$  è limitato anche  $f(C)$  è limitato.
- iii) Si dimostri che se  $C$  è chiuso anche  $f^{\leftarrow}(C)$  è chiuso.

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito D - Trieste, 28 gennaio 2011

**Esercizio 1.** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan 2x)}{\arcsin x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-x)^{-x} - (4-x)^{1-x}}{x}, \quad \lim_n \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}.$$

**Esercizio 2.**

- i) Si studi la funzione  $f(x) = e^x(x^3 - 2x^2)$ .
- ii) Al variare di  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$  si dica quante sono e che segno hanno le soluzioni dell'equazione  $f(x) - \lambda = 0$ , dove  $f$  è la funzione del punto precedente.
- iii) Si determinino i valori di  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$  tali che la funzione  $g(x) = \lambda x - e^x(x^3 - 5x^2 + 10x - 10)$  sia strettamente monotona su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continua. Si provi che:

- i) se  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  allora  $f$  è inferiormente limitata;
- ii) se  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  allora  $f$  non può essere iniettiva.
- iii) se  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  allora  $f$  non può essere convessa.

**Esercizio 4. (LT in Fisica)**

- i) Si determini il comportamento delle seguenti serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\log n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)}{\log n}$ .
- ii) Si calcoli il seguente integrale indefinito:  $\int x(\log x)^2 dx$ .

**Esercizio 4. (LT in Matematica)** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua

- i) Si dia un esempio di  $f$  per cui  $f(\mathbb{R})$  è aperto e non chiuso e un esempio per cui lo stesso insieme è chiuso e non aperto.
- ii) Si dimostri che se  $C$  è limitato anche  $f(C)$  è limitato.
- iii) Si dimostri che se  $C$  è chiuso anche  $f^{-1}(C)$  è chiuso.