

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito A - Trieste, 28 gennaio 2011

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\log(1 + 2x))}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{x+1} - x^x}{x}, \quad \lim_n \frac{n^2}{\sqrt[n]{1 + 2^4 + 3^6 + \dots + n^{2n}}}.$$

Esercizio 2.

- i) Si studi la funzione $f(x) = e^x(x^3 + 2x^2)$.
- ii) Al variare di λ in \mathbb{R} si dica quante sono e che segno hanno le soluzioni dell'equazione $f(x) - \lambda = 0$, dove f è la funzione del punto precedente.
- iii) Si determinino i valori di λ in \mathbb{R} tali che la funzione $g(x) = e^x(x^3 - x^2 + 2x - 2) - \lambda x$ sia strettamente monotona su tutto \mathbb{R} .

Esercizio 3. Sia $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continua. Si provi che:

- i) se esistono finiti $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ allora f è limitata;
- ii) se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ allora f non può essere suriettiva.
- iii) se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ allora f non può essere convessa.

Esercizio 4. (LT in Fisica)

- i) Si determini il comportamento delle seguenti serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\log n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n}}$.
- ii) Si calcoli il seguente integrale indefinito: $\int x \log(x^2 + 1) dx$.

Esercizio 4. (LT in Matematica) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua

- i) Si dia un esempio di f per cui $f(\mathbb{R})$ è aperto e non chiuso e un esempio per cui lo stesso insieme è chiuso e non aperto.
- ii) Si dimostri che se C è limitato anche $f(C)$ è limitato.
- iii) Si dimostri che se C è chiuso anche $f^{\leftarrow}(C)$ è chiuso.

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito B - Trieste, 28 gennaio 2011

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan x)}{\arcsin 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-x)^{-x} - (2-x)^{1-x}}{x}, \quad \lim_n \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}.$$

Esercizio 2.

- i) Si studi la funzione $f(x) = e^x(x^3 - 2x^2)$.
- ii) Al variare di λ in \mathbb{R} si dica quante sono e che segno hanno le soluzioni dell'equazione $f(x) - \lambda = 0$, dove f è la funzione del punto precedente.
- iii) Si determinino i valori di λ in \mathbb{R} tali che la funzione $g(x) = e^x(x^3 - 5x^2 + 10x - 10) - \lambda x$ sia strettamente monotona su tutto \mathbb{R} .

Esercizio 3. Sia $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continua. Si provi che:

- i) se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ allora f è inferiormente limitata;
- ii) se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ allora f non può essere iniettiva.
- iii) se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ allora f non può essere convessa.

Esercizio 4. (LT in Fisica)

- i) Si determini il comportamento delle seguenti serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\log n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)}{\log n}$.
- ii) Si calcoli il seguente integrale indefinito: $\int x(\log x)^2 dx$.

Esercizio 4. (LT in Matematica) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua

- i) Si dia un esempio di f per cui $f(\mathbb{R})$ è aperto e non chiuso e un esempio per cui lo stesso insieme è chiuso e non aperto.
- ii) Si dimostri che se C è limitato anche $f(C)$ è limitato.
- iii) Si dimostri che se C è chiuso anche $f^{-1}(C)$ è chiuso.

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito C - Trieste, 28 gennaio 2011

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\log(1+x))}{\sin 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)^{x+1} - (x+1)^x}{x}, \quad \lim_n \frac{n^2}{\sqrt[n]{1+2^4+3^6+\dots+n^{2n}}}.$$

Esercizio 2.

- i) Si studi la funzione $f(x) = e^x(x^3 + 2x^2)$.
- ii) Al variare di λ in \mathbb{R} si dica quante sono e che segno hanno le soluzioni dell'equazione $f(x) - \lambda = 0$, dove f è la funzione del punto precedente.
- iii) Si determinino i valori di λ in \mathbb{R} tali che la funzione $g(x) = \lambda x - e^x(x^3 - x^2 + 2x - 2)$ sia strettamente monotona su tutto \mathbb{R} .

Esercizio 3. Sia $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continua. Si provi che:

- i) se esistono finiti $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ allora f è limitata;
- ii) se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ allora f non può essere suriettiva.
- iii) se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ allora f non può essere convessa.

Esercizio 4. (LT in Fisica)

- i) Si determini il comportamento delle seguenti serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\log n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n}}$.
- ii) Si calcoli il seguente integrale indefinito: $\int x \log(x^2 + 1) dx$.

Esercizio 4. (LT in Matematica) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua

- i) Si dia un esempio di f per cui $f(\mathbb{R})$ è aperto e non chiuso e un esempio per cui lo stesso insieme è chiuso e non aperto.
- ii) Si dimostri che se C è limitato anche $f(C)$ è limitato.
- iii) Si dimostri che se C è chiuso anche $f^{\leftarrow}(C)$ è chiuso.

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito D - Trieste, 28 gennaio 2011

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan 2x)}{\arcsin x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-x)^{-x} - (4-x)^{1-x}}{x}, \quad \lim_n \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}.$$

Esercizio 2.

- i) Si studi la funzione $f(x) = e^x(x^3 - 2x^2)$.
- ii) Al variare di λ in \mathbb{R} si dica quante sono e che segno hanno le soluzioni dell'equazione $f(x) - \lambda = 0$, dove f è la funzione del punto precedente.
- iii) Si determinino i valori di λ in \mathbb{R} tali che la funzione $g(x) = \lambda x - e^x(x^3 - 5x^2 + 10x - 10)$ sia strettamente monotona su tutto \mathbb{R} .

Esercizio 3. Sia $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continua. Si provi che:

- i) se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ allora f è inferiormente limitata;
- ii) se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ allora f non può essere iniettiva.
- iii) se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ allora f non può essere convessa.

Esercizio 4. (LT in Fisica)

- i) Si determini il comportamento delle seguenti serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\log n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)}{\log n}$.
- ii) Si calcoli il seguente integrale indefinito: $\int x(\log x)^2 dx$.

Esercizio 4. (LT in Matematica) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua

- i) Si dia un esempio di f per cui $f(\mathbb{R})$ è aperto e non chiuso e un esempio per cui lo stesso insieme è chiuso e non aperto.
- ii) Si dimostri che se C è limitato anche $f(C)$ è limitato.
- iii) Si dimostri che se C è chiuso anche $f^{-1}(C)$ è chiuso.