

Anno Accademico 2014/15

Corso di Istituzioni di Analisi Superiore, modulo B

Titolare del corso: Daniele Del Santo

### Programma di massima del corso

#### Derivabilità, funzioni AC e BV

Richiami sulla nozioni di derivabilità. Esempio di funzione non derivabile in nessun punto. Abbondanza delle funzioni continue non derivabili in nessun punto. Derivate di Dini. Numerabilità dei punti con spigoli o cuspidi. Teorema di Lebesgue sulla derivabilità delle funzioni monotone. Punti invisibili a destra e dimostrazione del teorema di Lebesgue solo nel caso di funzioni continue. Teorema di Tonelli sulla derivabilità della somma di una serie di funzioni monotone. Generalità sulle funzioni a variazione limitata. Le funzioni a variazione limitata sono derivabili quasi ovunque. Derivata della funzione integrale di una funzione di  $L^1$ . Generalità sulla funzioni assolutamente continue. Assoluta continuità dell'integrale. Funzioni assolutamente continue. Le funzioni assolutamente continue sono tutte e sole le funzioni a variazione limitata che sono funzioni integrali di funzioni  $L^1$ . Osservazioni sul teorema fondamentale del calcolo in versione Riemann e Lebesgue. Funzione singolare di Lebesgue. Integrazione per parti in  $L^1$ .

#### Misure con segno e complesse, teorema di Radon Nykodim, funzione massimale

Generalità su misure con segno e misure complesse. Decomposizione di Hahn di una misura con segno. Dimostrazione del teorema di decomposizione di Hahn. Variazione positiva e negativa di una misura con segno. Variazione totale di una misura con segno e sua definizione alternativa. Variazione di una misura complessa. Misure assolutamente continue rispetto a una misura positiva. Teorema di Radon Nykodim. Osservazioni sulla misura di Lebesgue-Stieltjes su  $\mathbb{R}$ . Derivata simmetrica di una misura con segno o complessa sui boreliani. Funzione massimale di Hardy e Littlewood di una misura. Il lemma di Wiener. Teorema massimale di Hardy e Littlewood. Punti di Lebesgue per un funzione di  $L^1$ . Per una funzione di  $L^1$  quasi ogni punto è punto di Lebesgue. Considerazioni finali riguardanti il rapporto tra densità di una misura assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e derivata simmetrica della misura stessa.

#### Distribuzioni

Risultati propedeutici alla teoria delle distribuzioni. Teorema di densità di  $C_0$  in  $L^1$ . Teorema di densità di  $C_0$  in  $L^p$ , con  $p$  in  $[1, +\infty[$ . Convoluzione di funzioni di  $L^p$ . Disuguaglianza di Young. Regolarità della convoluzione. Funzioni test. Famiglie di mollificatori. Teoremi di approssimazione con le mollificate, in  $C_0$  e in  $L^p$ . Partizione dell'unità. Definizione di distribuzione. Esempi significativi: funzioni  $L^1_{loc}$ , delta di Dirac. Esempi di distribuzioni di ordine 1, di ordine infinito. Un'osservazione sulle misure di Radon positive e non, le misure di Radon positive sono distribuzioni di ordine zero. Una definizione equivalente di distribuzione che fa uso della nozione di convergenza di una successione di funzioni test nel senso di  $D(\Omega)$ . Teorema di località di una

distribuzione. Derivata di una distribuzione. La derivata di una distribuzione è una distribuzione. Esempi di derivazione, la funzione di Heaviside. La distribuzione valore principale di  $1/x$ . Il teorema di struttura locale delle distribuzioni. Moltiplicazione di una distribuzione con una funzione  $C^\infty$ . Regola di derivazione di un prodotto di una distribuzione per una funzione  $C^\infty$ . Il lemma di Du Bois-Reymond. Distribuzioni a supporto compatto. Estensione di una distribuzione a supporto compatto alle funzioni  $C^\infty$ . Topologia di Fréchet delle funzioni  $C^\infty$ . Convoluzione di una distribuzione con una funzione test. Approssimazione di distribuzioni con funzioni  $C^\infty$ . Continuità dell'operazione di convoluzione tra le funzioni test e le funzioni  $C^\infty$ . Definizione di convoluzione di distribuzioni. Generalità sulla trasformata di Fourier di una funzione  $L^1$ . Lemma di Riemann-Lebesgue. Calcolo di alcune trasformate di Fourier. Un lemma sulla derivazione sotto il segno di integrale. La trasformata di Fourier della funzione gaussiana. Lo spazio di Schwartz. Inclusioni topologiche tra lo spazio di Schwartz, lo spazio delle funzioni test e lo spazio delle funzioni  $C^\infty$ . Azione della trasformata di Fourier sullo spazio di Schwartz. La trasformata di Fourier della funzione di Heaviside. Il teorema di inversione. La formula di Parseval. Il teorema di Plancherel. Osservazioni sulle funzioni analitiche e analitiche intere. Osservazioni sulla trasformata di Fourier-Laplace di una funzione continua a supporto compatto e sulla trasformata di Fourier-Laplace di una distribuzione a supporto compatto. La trasformata di Fourier-Laplace di una distribuzione a supporto compatto è una funzione analitica intera.

## Spazi di Sobolev

Spazi di Sobolev in dimensione 1. Definizione e generalità. Rappresentante continuo di una funzione in  $W^{1,p}$ . Caratterizzazione di  $W^{1,p}$  per  $p > 1$ . Caratterizzazione di  $W^{1,p}$  per  $p > 1$ . Teorema di prolungamento per riflessione e troncatura. Teorema di densità di  $C^\infty_0(\mathbf{R})$  in  $W^{1,p}(I)$ . Immersioni di Sobolev. Immersioni compatte in  $C$  e  $L^q$ . Corollari alle immersioni di Sobolev: andamento all'infinito. Proprietà di algebra, derivazione della composizione con una funzione  $C^1$ . Lo spazio  $W^{1,p}_0$  e le sue caratterizzazioni. La disuguaglianza di Poincaré. Esempi di problemi ai limiti: il problema di Dirichlet omogeneo. Il problema di Neumann omogeneo in dimensione 1. Spazi di Sobolev in dimensione  $N$ : definizioni e generalità. Il lemma di Friedrichs. Caratterizzazione di  $W^{1,p}$  per  $p > 1$ . Prodotto di due funzioni di  $W^{1,p}$  limitate in norma  $L^\infty$ . Composizione con una funzione  $C^1$ , cambio di variabili per funzioni in spazi di Sobolev. Aperti di classe  $C^1$ . Il teorema di prolungamento: idea della dimostrazione, riflessione e troncatura, partizione dell'unità. Densità di  $C^\infty_0(\mathbf{R}^n)$  in  $W^{1,p}$  su un aperto di classe  $C^1$ . Il teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg. Corollari al teorema di S.-G.-N. Il teorema di Morrey. Caso di un aperto di classe  $C^1$  con frontiera limitata. Il teorema di Rellich (senza dim.). Immersioni di Sobolev nel caso di  $W^{m,p}$ . Cenni su lo spazio  $W^{1,p}_0$ , Caratterizzazione delle funzioni continue in  $W^{1,p}_0$ . La disuguaglianza di Poincaré.

## Testi consigliati

E. Hewitt, K. Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer Verlag.

W. Rudin, Analisi Reale e Complessa, Bollati Boringhieri.

A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Elementi di teoria delle funzioni e di Analisi Funzionale, Ed. Mir.

L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators, Springer Verlag.

H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Éd. Masson.

