

Anno Accademico 2013/14

Corso di Analisi 3, modulo A

Titolare del corso: Daniele Del Santo

Programma del corso

Spazi metrici e topologici, spazi normati e spazi di Hilbert.

Nozione di distanza e di spazio metrico. Esempi notevoli: \mathbb{R} con la distanza euclidea, \mathbb{R}^n con la distanza euclidea e richiamo della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, distanza-1 e distanza-infinito, altre distanze particolari. Topologia indotta da una distanza: palle aperte e chiuse, intorno, insiemi aperti e loro proprietà, punti di accumulazione. Insieme derivato, insiemi chiusi e chiusura di un insieme. Teorema di caratterizzazione della chiusura tramite il derivato. Metriche topologicamente equivalenti, condizione sufficiente all'equivalenza delle metriche. Successioni in uno spazio metrico, successioni convergenti e successioni di Cauchy. Successioni e topologia di uno spazio metrico, caratterizzazione dei chiusi e della chiusura tramite le successioni. Funzioni continue tra spazi metrici. Continuità in un punto e continuità globale. Esercizi sulla continuità (rispetto alla metrica euclidea) delle funzioni definite su \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R} . Caratterizzazione della continuità tra spazi metrici tramite le successioni. Norma su uno spazio vettoriale. Distanza generata da una norma. Spazi di Banach. Prodotti scalari, spazi di Hilbert. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e identità del parallelogramma. Esempi di spazi normati. Disuguaglianza di Young. Disuguaglianza di Hölder in \mathbb{R}^n . Disuguaglianza di Minkowski per le norme p in \mathbb{R}^n . Applicazioni lineari tra spazi normati. Per una funzione lineare tra spazi normati la continuità equivale alla limitatezza. Una funzione lineare da \mathbb{R}^n a uno spazio normato di dimensione finita è sempre continua. Una funzione lineare biiettiva tra \mathbb{R}^n e uno spazio normato è continua con inversa continua. Norme equivalenti. Su \mathbb{R}^n e sugli spazi normati di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti.

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

Nozione di derivata direzionale per una funzione definita su un aperto di \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R} . Definizione di funzione differenziabile. Differenziabilità implica continuità. Definizione di differenziale. Unicità del differenziale. Rapporto tra derivate direzionali e differenziale. Gradiente. Teorema del differenziale totale. Interpretazione geometrica delle nozioni di differenziabilità e di gradiente. Derivate parziali successive. Il teorema di Schwarz (Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921) sull'inversione dell'ordine di derivazione. La matrice hessiana. Funzioni differenziabili da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Matrice jacobiana. Differenziale della funzione composta. Derivate di ordine superiore. Formula di Taylor di una funzione di più variabili. Formula al secondo ordine e matrice hessiana. Punti critici e massimi o minimi locali liberi per funzioni di più variabili. Punti di sella. Forme quadratiche definite positive, negative e indefinite. Condizione di positività e autovalori, teorema di Sylvester.

Funzioni implicite, massimi e minimi vincolati

Funzioni definite in forma implicita, teorema del Dini. Esempi. Teorema della funzioni implicite nel caso generale (senza dim.). Ortogonalità tra gradiente e curve di livello di una funzione. Minimi e massimi vincolati, caso del vincolo espresso tramite il grafico di una funzione, in forma parametrica e tramite una funzione implicita. Interpretazione geometrica e condizione di parallelismo tra il gradiente della funzione e il vettore normale al vincolo. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di vincolo dato da una funzione a più componenti.

Successioni e serie di funzioni serie di potenze

Il teorema di Banach-Caccioppoli. Applicazione del teorema delle contrazioni nella dimostrazione del teorema della funzione implicita in \mathbb{R}^n . Successioni di funzioni. Convergenza semplice e convergenza uniforme per successioni di funzioni. Il teorema dei due limiti. Limite uniforme di successioni di funzioni continue. Passaggio al limite sotto il segno di integrale e di derivata. Serie di funzioni. M-test di Weierstrass. Serie di potenze. Il lemma di Abel. Dominio di convergenza di una serie di potenze. Il teorema di Cauchy-Hadamard. Esempi di calcolo di raggi di convergenza. Serie derivata. Proprietà della funzione somma di una serie di potenze. Serie di Taylor di una funzione e serie di Taylor della funzione somma di Una serie di potenze.

Equazioni differenziali

Esempio dell'equazione della crescita malthusiana e dell'equazione logistica. Definizioni di equazione e soluzione. Sistemi di equazioni e loro rapporto con le equazioni di ordine superiore. Problema di Cauchy. Teorema di Cauchy-Lipschitz. Teorema di Peano (senza dimostrazione). Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Prolungamento di soluzioni. Prolungabilità di soluzioni. Soluzioni massimali. Condizioni di prolungabilità: esistenza del limite di una successione di valori di una soluzione calcolata su una successione di punti crescenti. Teorema di uscita da un compatto del dominio per il grafico di una soluzione. Lemma di Gronwall. Teorema di esistenza globale sulla striscia in condizioni di sottolinearità. Esercizi su equazioni differenziali lineari del primo ordine, a variabili separabili, omogenee, di Bernoulli. Equazioni lineari di ordine superiore. Struttura dell'insieme delle soluzioni. Metodo della matrice wronskiana per la determinazione della soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Equazioni a coefficienti costanti.