

## Programma del corso di Analisi 3, Modulo A (LT Matematica)

A. A. 2012/13

Titolare del corso: prof. Daniele Del Santo

### Spazi metrici

Nozione di distanza e di spazio metrico. Esempi notevoli:  $\mathbb{R}$  con la distanza euclidea,  $\mathbb{R}^n$  con la distanza euclidea, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, distanza-1 e distanza-infinito, altre distanze particolari. Topologia indotta da una distanza: palle aperte e chiuse, intorni, insiemi aperti e loro proprieti, punti di accumulazione, insieme derivato, insiemi chiusi e chiusura di un insieme. Teorema di caratterizzazione della chiusura tramite il derivato. Metriche topologicamente equivalenti, condizione sufficiente all'equivalenza delle metriche. Successioni in uno spazio metrico, successioni convergenti e successioni di Cauchy. Successioni e topologia di uno spazio metrico, caratterizzazione dei chiusi e della chiusura tramite le successioni. Funzioni continue tra spazi metrici. Continuità in un punto e continuità globale.

### Spazi normati

Norma su uno spazio vettoriale. Distanza generata da una norma. Topologia prodotto su un prodotto cartesiano di spazi metrici o topologici. La topologia generata da una norma rende continue le operazioni di somma e prodotto per uno scalare. Nozione di spazio topologico vettoriale. Disuguaglianza di Young. Disuguaglianza di Hölder in  $\mathbb{R}^n$ . Disuguaglianza di Minkowski per le norme  $p$  in  $\mathbb{R}^n$ . Applicazioni lineari tra spazi normati. Per una funzione lineare tra spazi normati la continuità equivale alla limitatezza. Lo spazio normato delle lineari e continue tra due spazi normati. Una funzione lineare da  $\mathbb{R}^n$  a uno spazio normato di dimensione finita è sempre continua. Una funzione lineare biiettiva tra  $\mathbb{R}^n$  e uno spazio normato è continua con inversa continua. Norme equivalenti. Su  $\mathbb{R}^n$  e sugli spazi normati di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti. Esempi di norme non equivalenti.

### Calcolo differenziale, massimi e minimi liberi

Nozione di derivata direzionale per una funzione definita su un aperto di  $\mathbb{R}^n$  a valori in  $\mathbb{R}$ . Esempi di derivate direzionali in  $\mathbb{R}^n$  e in spazi di dimensione infinita. Derivate direzionali e derivate parziali. Studio di condizioni che garantiscano la continuità delle funzioni definite su  $\mathbb{R}^n$ . Definizione di funzione differenziabile. Definizione di differenziale. Unicità del differenziale. Funzioni differenziabili tra spazi normati. Differenziabilità implica continuità. Rapporto tra differenziale, derivate direzionali e derivate parziali. Teorema del differenziale totale. Interpretazione geometrica della differenziabilità. Piano tangente al grafico di una funzione. Funzioni differenziabili da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Matrice jacobiana. Differenziale della funzione composta. Derivate di ordine superiore. Formula di Taylor con

resto in forma integrale, per funzioni di una variabile. Formula di Taylor con il resto di Peano nel caso di una funzione di più variabili. Formula al secondo ordine e matrice hessiana. Forme quadratiche definite positive, negative e indefinite. Condizione di positività e autovalori, teorema di Sylvester. Punti critici e massimi o minimi locali liberi per funzioni di più variabili. Punti di sella. Esempi di studio dei punti critici. Esercizi su massimi e minimi liberi per funzioni di più variabili. Valori assunti da una forma quadratica e autovalori della matrice associata. Funzioni armoniche e principio del massimo debole. Funzioni positivamente omogenee e teorema di Eulero. Massimo tasso di variazione e gradiente.

### **Funzioni implicite, massimi e minimi vincolati**

Funzioni definite in forma implicita, teorema del Dini. Ortogonalità tra gradiente e curve di livello di una funzione. Minimi e massimi vincolati, caso del vincolo espresso tramite il grafico di una funzione, in forma parametrica e tramite una funzione implicita. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Interpretazione geometrica e condizione di parallelismo tra il gradiente della funzione e il vettore normale al vincolo. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di vincolo dato da una funzione a più componenti (cenno).

### **Teorema di Banach-Caccioppoli**

Spazi metrici completi. Esempi importanti di spazi completi:  $B(X, Y)$  con la distanza del sup,  $C_{B(X, Y)}$  con la distanza del sup. Spazi metrici totalmente limitati. Caratterizzazione degli spazi metrici sequenzialmente compatti. Ricoprimenti e sottoricoprimenti. Il teorema di Banach-Caccioppoli. Applicazione del teorema delle contrazioni nella dimostrazione del teorema della funzione implicita in  $\mathbb{R}^n$  (cenno). Il teorema di Brouwer in dimensione 1. Il teorema di invertibilità locale in  $\mathbb{R}^n$  (solo enunciato). Il teorema di Brouwer in  $\mathbb{R}^2$ : riduzione del problema ad un triangolo equilatero, lemma di Sperner, dimostrazione del teorema di Brouwer in  $\mathbb{R}^2$ .

### **Successioni e serie di funzioni, serie di potenze**

Successioni e serie di funzioni. Richiamo della nozione di convergenza puntuale e uniforme. Un lemma sulla condizione di Cauchy per la convergenza uniforme. l'M-test di Weierstrass per la convergenza uniforme. Il teorema dei due limiti. Passaggio al limite sotto il segno di integrale e sotto il segno di derivata. Continuità del funzionale integrale sullo spazio metrico delle funzioni continue su un intervallo. Serie di potenze. Lemma di Abel, Raggio di convergenza di una serie di potenze. Teorema di Cauchy-Hadamard. Serie derivata. Raggio di convergenza della serie derivata. Regolarità della funzione somma di una serie di potenze. Esempi di calcolo di somme di serie di potenze usando i teoremi di derivazione e integrazione. Sviluppabilità in serie di Taylor. Condizione sufficiente alla sviluppabilità in serie di Taylor. Funzioni analitiche. Esempi di sviluppi in serie di Taylor. La serie binomiale.

## **Serie di Fourier**

Serie di Fourier. Funzioni periodiche, funzioni continue a tratti e regolari a tratti. Coefficienti di Fourier di una funzione integrabile secondo Riemann. Definizione di serie di Fourier. Teorema di convergenza della serie di Fourier per funzioni regolari a tratti. Disuguaglianza di Bessel e lemma di Riemann-Lebesgue per le serie di Fourier. Teorema di convergenza uniforme della serie di Fourier per le funzioni continue e regolari a tratti (solo enunciato).

## **Equazioni differenziali ordinarie**

Equazioni differenziali ordinarie. Equazioni in forma implicita e in forma normale. Ordine di un'equazione differenziale. Esempi di equazioni differenziali: l'equazione di Malthus e l'equazione logistica. Sistemi di equazioni differenziali. Rapporto tra un'equazione di ordine  $n$  e un sistema. Il problema di Cauchy per le equazioni differenziali in forma normale. Il teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard. Il teorema di Peano (solo enunciato). Un esempio di equazione differenziale senza unicità. Equazioni differenziali a variabili separabili. Esercizi sulle equazioni a variabili separabili. Prolungamento di soluzioni. Prolungabilità di soluzioni. Soluzioni massimali. Condizioni di prolungabilità: esistenza del limite di una soluzione, esistenza del limite di una successione di valori di una soluzione calcolata su una successione di punti crescenti. Teorema di uscita da un compatto del dominio per il grafico di una soluzione. Lemma di Gronwall. Teorema di esistenza globale sulla striscia in condizioni di sottolinarietà. Dipendenza continua dai dati per le soluzioni del problema di Cauchy (solo enunciato). Equazioni differenziali lineari di ordine  $k \geq 1$ . Equazioni differenziali lineari omogenee. Spazio delle soluzioni di una equazione differenziale omogenea. Soluzione particolare di una non omogenea. Metodo della matrice wronskiana per la determinazione delle soluzioni particolari. Equazioni lineari a coefficienti costanti.