Esercizi n.7

1) Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma : [0, \pi/3] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t, \log(\cos t)).$$

2) Dato

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 \le \min\{1 - z, \frac{1}{4}\}, \ z \ge 0\},$$

calcolare l'area di ∂V.

3) Dato

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (z \le 0 \text{ e } x^2+y^2+z^2 \le 1) \text{ oppure } (z \ge 0 \text{ e } x^2+y^2 \le e^{-z})\},$$

calcolare volume di E e l'area di ∂E.

4) Dati

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z \ge 0 \ \text{ e } \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

e

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(x, y, z) = (yz, \ xz, \ xy),$$

determinare il flusso di F uscente da A attraverso la porzione di ∂A in cui è $z > 0$.

5) Sia

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t).$$

i) calcolare la lunghezza di γ;

ii) calcolare l'area della regione di piano racchiusa da γ^*;

iii) dato il campo vettoriale

$$\underline{\mathrm{a}}(x, y) = (\frac{y}{x^2 + y^2}, \ \frac{-x}{x^2 + y^2}),$$

calcolare $\int_\gamma \underline{\mathrm{a}}$.

6) Sia

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^2 + y^2 \le 1 \ \text{ e } \ 0 < y \le \frac{x}{\sqrt{3}}\},$$

e sia $\varphi : K \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x, \ y, \ xy)$. Calcolare $\displaystyle\int_\varphi x^2 z \, d\sigma$.

7) Sia V il solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse z il trapezoide

$$\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \le y \le z^2 \quad \text{e} \quad 1 \le z \le 2\}.$$

Calcolare il volume di V e l'area di ∂V.

8) Sia

$$K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \, , \, 0 \le u \le \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad 0 \le v \le u\},$$

e sia $\varphi : K \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u\cos v, \; v, \; \cos v)$. Calcolare $\displaystyle\int_\varphi \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 y}}\, d\sigma$.

9) Data la curva $\gamma : [0, \; \log 2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \; e^t)$, calcolare $\displaystyle\int_\gamma 2y^2 \, ds$.

10) Siano

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 - x^2 - y^2\},$$
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2+y^2 \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}\},$$

Calcolare il volume e l'area della fontiera di E e di F.

11) Calcolare il volume e l'area della frontiera del solido che si ottiene intersecando due sfere di raggio 1 i cui centri siano a distanza 1 uno dall'altro.

12) Si consideri la curva in forma polare $\rho(\theta) = 1 + \sin\theta$, con $\theta \in [0, \pi]$. Se ne calcoli la lunghezza e si calcoli il volume e l'area della frontiera del solido che si ottiene facendola ruotare attorno all'asse x.

13) Determinare l'area della porzione di piano delimitata dal sostegno di $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \frac{\pi}{2}\sin t, \; \sin t \cos t)$.

14) Siano

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\},$$

e

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 - x + y^2 \le 0\}.$$

i) Calcolare il volume e l'area della frontiera di $E \cap C$.

ii) Si verifichi che l'intersezione di ∂C con $\tilde{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ è una curva γ (usare eventualmente *Dini*).

iii) Chiamando L la costante $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^2 x}\, dx$, si calcoli la lunghezza di γ.

iv) Che curva piana si ottiene da γ se ∂C viene tagliata lungo l'asse z e "distesa" su un piano?