Esercizi n.6

key words: campi vettoriali, integrale di seconda specie, campi vettoriali conservativi, funzione potenziale, campi vettoriali irrotazionali, domini stellati, domini semplicemente connessi, formula di Gauss-Green, divergenza, teorema della divergenza, formula di Stokes.

1) Dato il campo vettoriale

$$\underline{a}(x,y) = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$$

sul dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\}$, dire se è conservativo ed eventualmente trovare una funzione potenziale. Stesse domande per $\underline{a}(x,y)$ e $\tilde{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

2) Dato il campo vettoriale

$$\underline{a}(x,y) = (\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}),$$

dire se è conservativo sul suo dominio di definizione ed eventualmente calcolarne un potenziale.

3) Dato il campo vettoriale

$$\underline{a}(x,y) = (1 - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}, e^{\frac{y}{x}}),$$

dire se è conservativo sul suo dominio di definizione ed eventualmente calcolarne un potenziale.

4) Dato il campo vettoriale

$$\underline{a}(x,y) = (3x^2y^2 + y^2, 3x^3y^2 + 2xy),$$

dire se è conservativo sul suo dominio di definizione ed eventualmente calcolarne un potenziale. Calcolare $\int_\gamma \underline{a}$, dove $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t)$.

5) Dato il campo vettoriale

$$\underline{a}(x,y) = (\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2}),$$

calcolare $\int_\gamma \underline{a}$, dove $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t\cos t, t + \sin t)$.

6) Dato il campo vettoriale

$$\underline{a}(x,y) = (\frac{-2y}{4x^2+y^2}, \frac{2x}{4x^2+y^2}),$$

calcolare $\int_\gamma \underline{\mathrm{a}}$, dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

7) Dato il campo di forze (espresso trascurando l'unità di misura)

$$F(x, y, z) = (x - xe^z,\ -y,\ e^z),$$

calcolare il lavoro compiuto nello spostamento $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

8) Data la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t(1-t),\ \sin(2\pi t))$, calcolare l'area della regione di piano da essa racchiusa.

9) Data la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t)$, calcolare l'area della regione di piano delimitata da γ^* e dall'asse delle x.

10) Sia il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (3xy^2,\ 3x^2y,\ z^3),$$

e sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0\}$. Calcolare il flusso di F uscente da E.

11) Sia il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0,\ 0,\ z),$$

e sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \geq z \geq x\}$. Calcolare il flusso di F uscente da E.