Esercizi n.5

key words: parametrizzazione di una superficie, superficie regolare, versore normale a una superficie regolare, area di una superficie regolare, integrale al differenziale di area, funzioni in forma implicita, teorema di Dini, minimi e massimi vincolati.

1) Si calcoli il versore normale e il piano tangente alle superficie nel punto a fianco indicato

i) $\varphi(u,v) = (u, v, uv)$ in $\varphi(1,1)$,

ii) $\varphi(u,v) = (u+v, u-v, u^2 - v^2)$ in $\varphi(0,1)$,

iii) $\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2+v^2})$ in $\varphi(1/2, 1/4)$.

2) Si calcoli l'area della porzione di cilindro di equazione $(\cos u, \sin u, v)$ contenuta nell'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| \le z\}$.

3) Si calcoli l'area della superficie ottenuta facendo ruotare la cardioide di equazione $\rho(\theta) = 2(1+\cos\theta)$ attorno all'asse delle x.

4) Si calcoli l'area della superficie ottenuta facendo ruotare la cardioide di equazione $\rho(\theta) = 2(1+\cos\theta)$ con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ attorno all'asse delle y.

5) Si calcoli l'area della superficie $\varphi : K \to \mathbb{R}^3$ dove

i) $\varphi(u,v) = (uv, u+v, u-v)$, $K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u \ge 0,\ v \ge 0,\ u^2+v^2 \le 1\}$,

ii) $\varphi(u,v) = (u^2, v^2, uv)$, $K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u^2+v^2 \le 4\}$,

iii) $\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{1+u^2+v^2})$, $K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$.

6) Si calcoli l'area della frontiera dei seguenti insiemi

i) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$,

ii) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$,

iii) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$.

6) Si calcoli il baricentro di una supeficie semisferica di densità superficiale costante.

7) Si calcoli il momento d'inerzia di una superficie sferica di densità costante rispetto ad un asse passante per il centro della sfera. Si confronti il risultato con quello di una sfera omogenea avente stessa massa.

8) Si trovi il massimo e il minimo della funzioni

i) $f(x, y) = x + 2y$ sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4x^2 + y^2 = 1\}$,

ii) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$,

iii) $f(x, y) = x + 2y$ sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 1,\ y \geq 0,\ xy \leq 4\}$.

9) Si calcoli massimo e minimo della funzione $f(x, y, z) = xyz$ sull'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

10) Trovare massimo e minimo (se esistono) della funzione $f(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz$ sulla porzione di superficie $xyz = V$ contenuta nel primo ottante.

11) Trovare la minima distanza tra la retta $x = -4$ e la parabola $x^2 + 2xy + y^2 + 6y = 0$.

12) Trovare massimo e minimo dell'ascissa x sulla curva di equazione $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x = 0$.