Esercizi n.4

key words: curve in $\mathbb{R}^n$, parametrizzazione e sostegno di una curva, curve semplici, curve chiuse, curve di Jordan, curve regolari, curve equivalenti e strettamente equivalenti, cammini e cammini orientati, curve rettificabili, lunghezza di una curva, rettificabilità delle curve C^1, integrali al differenziale d'arco.

1) Calcolare la lunghezza delle seguenti curve

i) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

ii) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, \sqrt{t})$.

iii) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t \sin t, t \cos t)$.

iv) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, e^t)$.

v) $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^2, t^4)$.

2) Calcolare la lunghezza delle seguenti curve in forma polare

i) $\theta \in [0, 2\pi], \quad \rho(\theta) = R \ (R > 0)$.

ii) $\theta \in [0, 2\pi], \quad \rho(\theta) = R(1 + \cos\theta) \ (R > 0)$.

iii) $\theta \in [0, 2\pi], \quad \rho(\theta) = Re^{a\theta} \ (R, \ a > 0)$.

iv) $\theta \in [0, 2\pi], \quad \rho(\theta) = R(1 + 2\cos\theta) \ (R > 0)$.

3) Determinare l'equazione di una curva piana e C^1, passante per il punto $(1, 0)$, tale che, detto O l'origine degli assi cartesiani e P un punto della curva, sia costantemente uguale a $\pi/4$ l'angolo tra OP e il vettore tangente alla curva in P.

4) Calcolare il baricentro di un filo omogeneo con densità lineare ρ che abbia forma di una semicirconferenza di raggio R. Confrontare il risultato con quello relativo alla semicorona circolare omogenea.

5) Calcolare i seguenti integrali al differenziale d'arco

i) $\int_\varphi x ds$, dove $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t, t^2)$.

ii) $\int_\varphi x ds$, dove $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t, \sqrt{t})$.

iii) $\int_\varphi x ds$, dove φ ha equazione in forma polare $\rho(\theta) = 1 + \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.